# Bernoulli Resolve

# Matemática

6V

Volume 1

# Sumário - Matemática

## Módulo A



## Módulo B



## Módulo C



## Módulo D



## Módulo E

# MÓDULO – A 01

## Raciocínio lógico

### Exercícios de Fixação

**Questão 01 – Letra C**

**Comentário:**

A) Falsa. Considere, como contraexemplo, que todas as pessoas tenham altura 1,60 m. Essa é uma configuração possível, na qual ninguém tem mais que 1,90 m.

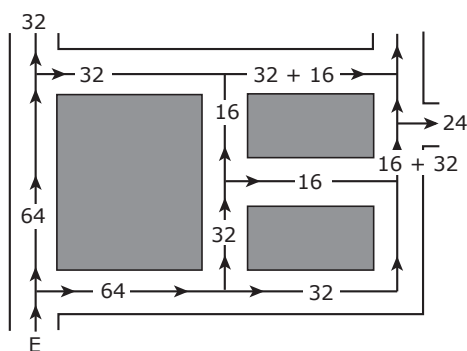
B) Falsa. Poderíamos supor, por exemplo, que essa família seja composta de um casal e seus 11 filhos homens. Essa é uma configuração possível, na qual há menos de duas mulheres.

C) Verdadeira. Associando um mês a cada pessoa, o máximo de pessoas que podemos ter para que a cada mês corresponda a uma única pessoa é 12, pois só existem 12 meses. Havendo 13 pessoas, à 13ª pessoa teríamos de associar um mês que já estava associado a outra pessoa.

D) Falsa. Como contraexemplo, poderiam todas ter nascido no dia 1º. Essa é uma configuração possível, na qual ninguém nasceu em um dia par.

E) Falsa. Como contraexemplo, poderiam todas ter nascido no mês de março. Essa é uma configuração possível, na qual ninguém nasceu nos meses de janeiro ou fevereiro.

**Questão 02 – Letra A**

**Comentário:** De acordo com o raciocínio da questão, temos:

**Questão 03 – Letra E**

**Comentário:** Considerando que todos os cartões que têm uma vogal em uma face têm um número par na outra, temos as seguintes opções:

1º Vogal de um lado, par de outro.

2º Consoante de um lado, par de outro.

3º Consoante de um lado, ímpar de outro.

Já que o primeiro cartão possui uma vogal de um lado, é preciso confirmar se do outro há um número par.

O segundo cartão possui uma consoante de um lado, portanto, do outro, pode haver uma vogal ou consoante. Então, não é necessário virá-lo.

O terceiro cartão possui um número par de um lado, portanto, do outro, pode haver uma vogal ou uma consoante. Logo, também não é preciso virá-lo.

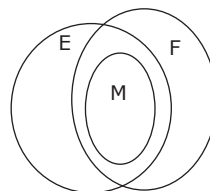
Por fim, o quarto cartão possui um número ímpar de um lado, portanto, é necessário virá-lo para garantir que haja, de seu outro lado, uma consoante.

Assim, para verificar a afirmação feita, temos de virar o primeiro e o último cartão.

**Questão 04 – Letra C**

**Comentário:** A afirmação diz que nenhuma pessoa lenta em aprender frequenta a escola. Para que essa afirmação seja falsa, é necessário que alguma pessoa lenta em aprender frequente a escola, o que nos leva à alternativa C.

**Questão 05 – Letra C**

**Comentário:** Utilizando diagrama para representar a afirmação, temos que os jovens que adoram esportes e festas podem ser representados pela interseção desses dois conjuntos. Portanto, como todos os jovens que gostam de matemática adoram esportes e festas, temos que esse conjunto está contido na interseção do conjunto de esportes e festas. Logo:

### Exercícios Propostos

**Questão 02 – Letra B**

**Comentário:** De acordo com a regra do jogo, para o quadrado central, faltam os números 2, 3, 5. Para facilitar o raciocínio, numeramos as linhas e colunas conforme a figura a seguir:

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 4 | | | | 7 | | | 5 | 6 |
| **2** | | | | | | | 9 | | 2 |
| **3** | 6 | | | | | | | | |
| **4** | 3 | | | | 6 | 9 | | | |
| **5** | | | 5 | 8 | ○ | 1 | 7 | | |
| **6** | 8 | | | 7 | | 4 | | | |
| **7** | | | | | | 3 | | 2 | 1 |
| **8** | | | 2 | | | | | | |
| **9** | 1 | 6 | | | 2 | | | | 7 |

O número pedido se encontra na 5ª linha e 5ª coluna. Ele não pode ser o 5, pois essa linha já apresenta o número 5 na 5ª linha e 3ª coluna. Também não pode ser o número 2, pois ele já aparece na 9ª linha e 5ª coluna. Portanto, o único número que poderá ser é o 3.

## Questão 03 – Letra C

**Comentário:**

**Escolhendo uma face para o 5, temos:**

1ª restrição: maior que 5 = {6, 8};

2ª restrição: soma entre [6,5; 12,5] = 6 é o único número possível.

**Escolhendo uma face para o 2, temos:**

Restrição: Soma entre [6,5; 12,5] = {8} (os números 5 e 6 já foram escolhidos).

**Escolhendo uma face para o 3, temos:**

1ª restrição: Maior que 3 = {4} (os outros números já foram escolhidos);

2ª restrição: Soma entre [6,5; 12,5] = {4}.

Portanto, os pares (número escolhido e seu respectivo na face oposta) formados no dado são:

{(5, 6); (2, 8); (3, 4)}.

Logo, a multiplicação entre pares que possui maior valor será 5.6 = 30.

## Questão 06 – Letra C

**Comentário:** Em um grupo de 24 pessoas, é possível que cada duas façam aniversário em um dos 12 meses do ano. Adicionando mais uma pessoa a esse grupo, ela com certeza fará aniversário em um mês no qual duas já fazem, e, então, três pessoas farão aniversário nesse mês. Logo, 25 é o menor valor de **n** que obriga que três pessoas façam aniversário em um mesmo mês.

## Questão 07 – Letra E

**Comentário:** Considerando a pior das hióteses, retiramos 10 bolas entre brancas e pretas. Após isso, retiramos mais 9 bolas de cada cor: 9 vermelhas, 9 verdes e 9 azuis. Por fim, a próxima bola completará a dezena com alguma das outras que foram retiradas. Logo, o total de bolas será:

$10 + 9 + 9 + 9 + 1 = 38$

## Questão 12 – Letra D

**Comentário:** Somando-se o número de turnos em que o funcionário trabalhou com o número de turnos em que ele não trabalhou, obtém-se o total de turnos existentes em D dias, ou seja, 2D. Equacionando, temos:

$2D = 9 + 6 + 7 \Rightarrow D = 11$

## Questão 14 – Letra B

**Comentário:** A contrapositiva da afirmativa I é "Se Artur é professor, então Paulo não é médico". Como a afirmativa I é verdadeira, sua contrapositiva também o é, e, então, pelas afirmativas I e II e pelo fato de que Artur é professor, temos:

Artur é professor $\Rightarrow$ Paulo não é médico $\Rightarrow$ Bruno é engenheiro.

## Questão 15

**Comentário:** Se as alternativas A, B, C ou E estivessem corretas, a D também estaria, e haveria mais de uma alternativa correta. Logo, a única alternativa cuja veracidade não implica a veracidade de nenhuma outra é a D, sendo somente essa a possibilidade de "resposta única" para o problema.

# Seção Enem

## Questão 01 – Letra D

**Eixo cognitivo:** V

**Competência de área:** 3

**Habilidade:** 14

**Comentário:** Para ir da 4ª etapa para a 6ª etapa, é necessário retirar da lata 800 mL (o volume da garrafa maior), colocar na menor garrafa 300 mL (o volume que, na 4ª etapa, encontra-se na garrafa maior) e encher a garrafa maior. Logo, o correto a se fazer é passar para a garrafa menor o conteúdo da garrafa maior (gerando a configuração ilustrada na alternativa D), para, então, encher a garrafa maior com o azeite da lata, levando à configuração ilustrada na 6ª etapa.

## Questão 02 – Letra E

**Eixo cognitivo:** IV

**Competência de área:** 3

**Habilidade:** 13

**Comentário:** Para que a montagem de novos pacotes seja feita com uma única pesagem, precisamos dividir o peso de cada saco de açúcar nos dois pratos da balança de forma a mantê-la em equilíbrio. Dessa forma, os 24 kg poderão ser divididos em dois pacotes de 12 kg.

## Questão 03 – Letra C

**Eixo cognitivo:** IV

**Competência de área:** 3

**Habilidade:** 13

**Comentário:** Fazendo a primeira pesagem, poderemos dividir o pacote inicial de 24 kg em duas partes iguais, colocando cada metade em um lado da balança. Dessa forma, mantendo os pratos em equilíbrio, teremos dois pacotes de 12 kg.

Para a segunda pesagem, poderemos dividir um dos pacotes de 12 kg feitos na primeira pesagem em duas partes iguais, colocando cada metade em um lado da balança, mantendo-a em equilíbrio. Dessa forma, teremos dois pacotes de 6 kg.

Com as duas pesagens concluídas, é possível unir os pacotes de 12 kg da primeira pesagem com os pacotes de 6 kg da segunda pesagem, formando pacotes de 18 kg.

## Questão 04 – Letra C

**Eixo cognitivo:** III

**Competência de área:** 7

**Habilidade:** 25

**Comentário:** Pela tabela no enunciado, vemos que o único colega que possui o telefone de Carlos é o Ênio. E, da mesma forma, o único colega que possui o telefone de Ênio é o Dino. Como Aldo possui o telefone de Dino, temos:

- 1ª ligação: Aldo para Dino – este fornecerá o número de Ênio;
- 2ª ligação: Aldo para Ênio – este fornecerá o número de Carlos;
- 3ª ligação: Aldo para Carlos.

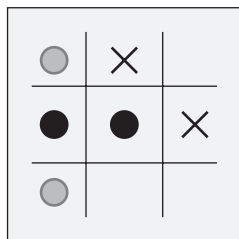
## Questão 05 – Letra B

**Eixo cognitivo:** V

**Competência de área:** 1

**Habilidade:** 5

**Comentário:** Ao posicionar a peça tanto na primeira linha da primeira coluna quanto na terceira linha da primeira coluna, o jogador que utiliza os círculos terá vitória garantida na

próxima rodada, pois poderá alinhar suas peças ou na vertical (preenchendo a primeira coluna) ou na diagonal do tabuleiro.

## Questão 06 – Letra C

**Eixo cognitivo:** II

**Competência de área:** 2

**Habilidade:** 7

**Comentário:** Por verificação direta, é fácil ver que para 1, 2 ou 3 movimentos é impossível conduzir a torre da casa H8 para a casa C1. Para 4 movimentos, existem várias possibilidades, uma das quais a seguir:

1º) Desloca-se a torre da posição H8 até H3;

2º) Desloca-se a torre da posição H3 até D3;

3º) Desloca-se a torre da posição D3 até D1;

4º) Desloca-se a torre da posição D1 até C1.

Todos esses movimentos foram feitos de forma a respeitar o movimento da torre, que só pode se descolar ou na mesma linha ou na mesma coluna, além de não poder passar por cima dos pontos pretos.

# MÓDULO – A 02

## Potenciação e radiciação

### Exercícios de Fixação

## Questão 01 – Letra E

**Comentário:**

$$\frac{10^{\frac{n}{2}}(10^{m-1}+10^{m+1})}{10^m\left(10^{\frac{n}{2}}+10^{2+\frac{n}{2}}\right)}=\frac{10^{\frac{n}{2}}\left(\frac{10^m}{10}+10^m.10\right)}{10^m\left(10^{\frac{n}{2}}+10^2.10^{\frac{n}{2}}\right)}=$$

$$\frac{10^{\frac{n}{2}}\ \frac{10^m+10^m.100}{10}}{10^m.10^{\frac{n}{2}}(1+100)}=\frac{\frac{10^m.101}{10}}{10^m.101}=$$

$$\frac{10^m.101}{10}.\frac{1}{10^m.101}=\frac{1}{10}=10^{-1}$$

## Questão 02 – Letra D

**Comentário:**

$A_Q = 0,4\ km^2 \Rightarrow A_Q = 0,4.10^6\ m^2 \Rightarrow A_Q = 4.10^5\ m^2 \Rightarrow$

$\ell^2 = 4.10^5\ m^2 \Rightarrow \ell = 2.10^2.\sqrt{10}\ m \Rightarrow \ell = 200.\sqrt{10}\ m$

Note que $3 < \sqrt{10} < 3,5$.

Daí, $200.3 < \ell < 200.3,5$.

Portanto, $600 < \ell < 700$.

## Questão 03 – Letra C

**Comentário:** Racionalizando cada um dos termos da equação temos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}.\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{-1}=\sqrt{2}-1$$

$$\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

Substituindo esses valores na equação dada:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{1+\sqrt{2}}-\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-(\sqrt{2}-1)-\frac{2-\sqrt{2}}{2}=$$

$$\frac{\sqrt{2}-2(\sqrt{2}-1)-(2-\sqrt{2})}{2}=0$$

## Questão 04

**Comentário:**

$$\left[\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}.0,66\ldots}+\sqrt{\left(\frac{5}{7}\right)^{0}-\frac{1}{1,33\ldots}}\right]^{-\frac{1}{2}}=\left[\sqrt{(6^{-1})^{-3}.\frac{6}{9}}+\sqrt{1-\frac{9}{12}}\right]^{-\frac{1}{2}}=$$

$$\left[\sqrt{.\frac{6^4}{9}}+\sqrt{\frac{3}{12}}\right]^{-\frac{1}{2}}=\left(12+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{25}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

## Questão 05 – Letra D

**Comentário:**

$m = (2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(\sqrt{72} + \sqrt{20} - 4\sqrt{2}) \Rightarrow$

$m = (4\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(6\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{2}) \Rightarrow$

$m = (3\sqrt{5} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}) \Rightarrow$

$m = 3(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}).2 \Rightarrow$

$m = 6(5 - 2) \Rightarrow m = 18$

### Exercícios Propostos

## Questão 04 – Letra B

**Comentário:**

$$A.B.C=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}.\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.\frac{x^{\frac{1}{6}}}{y^{\frac{1}{6}}} = x^{\frac{1}{2}}.x^{-\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{6}}.y^{-\frac{1}{2}}.y^{\frac{2}{3}}.y^{-\frac{1}{6}} \Rightarrow$$

$$A.B.C = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}.y^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = x^{\frac{3-2+1}{6}}.y^{\frac{-3+4-1}{6}} = x^{\frac{1}{3}}.y^0=\sqrt[3]{x}$$

## Questão 06 – Letra B

**Comentário:** $5^{17}.4^9 = 5^{17}.2^{18} = (5.2)^{17}.2 = 2.10^{17}$, que tem dezessete algarismos 0 e um algarismo 2, com um total de dezoito algarismos.

## Questão 08 – Letra B

**Comentário:**

$$\frac{3^{3-n}+3.3^{2-n}-9.3^{1-n}}{9.3^{2-n}}=\frac{3^3.3^{-n}+3^3.3^{-n}-3^3.3^{-n}}{3^4.3^{-n}}=$$

$$\frac{3^{-n}(3^3+3^3-3^3)}{3^4.3^{-n}}=\frac{3^3}{3^4}=\frac{1}{3}$$

## Questão 09 – Letra C

**Comentário:**

$38 \times 4^5 \times 5^{12} = 38 \times (2^2)^5 \times 5^{10} \times 5^2 = 38 \times 2^{10} \times 5^{10} \times 5^2 = 38 \times 10^{10} \times 25 = 950 \times 10^{10} = 9{,}5 \times 10^{12}$

## Questão 12 – Letra A

**Comentário:**

$$x + y = \frac{2}{3+2\sqrt{2}} + \frac{56}{4-\sqrt{2}} = \frac{8-2\sqrt{2}+168+112\sqrt{2}}{12+8\sqrt{2}-3\sqrt{2}-4} =$$

$$\frac{176+110\sqrt{2}}{8+5\sqrt{2}} \cdot \frac{8-5\sqrt{2}}{8-5\sqrt{2}} = \frac{1\,408+880\sqrt{2}-880\sqrt{2}-1\,100}{64-50} =$$

$$\frac{308}{14} = 22$$

## Questão 13 – Letra E

**Comentário:**

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})} = \frac{2}{1-x}$$

## Questão 15 – Letra B

**Comentário:** A estrutura lógica do triângulo numérico é:

1 $\quad \sqrt[3]{1} = 1$; 1ª linha

3 5 $\quad 3+5=8$; $\sqrt[3]{8}=2$; 2ª linha

7 9 11 $\quad 7+9+11=27$; $\sqrt[3]{27}=3$; 3ª linha

13 15 17 19 $\quad 13+15+17+19=27$; $\sqrt[3]{64}=4$; 4ª linha

Logo, para uma linha que possui como soma 8 000, temos:

$\sqrt[3]{8\,000} = 20$; 20ª linha $\quad x^2+x-1 = 20^2+20-1 = 419$

valor de x

## Questão 17 – Letra A

**Comentário:** Considerando as aproximações $\sqrt{2} \cong 1{,}4$ e $\sqrt{3} \cong 1{,}7$, temos $a \cong 4{,}8$; $b \approx 5{,}6$ e $c \cong 5{,}1$, em que se conclui que $a < c < b$.

## Questão 19 – Letra A

**Comentário:** Procuramos o menor quadrado perfeito maior que 987. Lembrando que $1\,024 = 2^{10} = (2^5)^2 = 32^2$, esperamos que a raiz desse número esteja próxima de 32. Testando o 31, temos $31^2 = 961 < 987$. Logo, o menor quadrado perfeito maior que 987 é 1 024, e 1 024 – 987 = 37.

## Questão 20 – Letra A

**Comentário:**

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{998}+\sqrt{999}} + \frac{1}{\sqrt{999}+\sqrt{1\,000}} =$$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} + \ldots + \frac{\sqrt{999}-\sqrt{998}}{999-998} + \frac{\sqrt{1\,000}-\sqrt{999}}{1\,000-999} =$$

$$\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{999}-\sqrt{998}+\sqrt{1\,000}-\sqrt{999} =$$

$$10\sqrt{10}-1$$

# Seção Enem

## Questão 01 – Letra E

**Eixo cognitivo:** III

**Competência de área:** 3

**Habilidade:** 12

**Comentário:** 10 litros de óleo são suficientes para contaminar $10^7$ litros de água potável; isto é, 1 litro de óleo para cada $10^6$ litros de água. Então, o total de água contaminada por 1 000 L de óleo será $1\,000.10^6 = 10^9$ L.

## Questão 02 – Letra B

**Eixo cognitivo:** II

**Competência de área:** 6

**Habilidade:** 24

**Comentário:**

$$\frac{500\,000}{200.10^9} = \frac{5.10^5}{2.10^{11}} = 2{,}5 \times 10^{-6}$$

## Questão 03 – Letra C

**Eixo cognitivo:** IV

**Competência de área:** 4

**Habilidade:** 17

**Comentário:** Se cada folha possui 0,1 mm de espessura e há uma pilha de 1 m de altura, temos então 10 000 folhas, pois $\frac{1\text{ m}}{0{,}1\text{ mm}} = \frac{1\,000\text{ mm}}{0{,}1\text{ mm}} = 10\,000$. Como, em cada folha, há 10 títulos, concluímos que temos, no total, 100 000 títulos, que corresponde a $10^5$.

## Questão 04 – Letra B

**Eixo cognitivo:** IV

**Competência de área:** 4

**Habilidade:** 17

**Comentário:** Como no período da infância até a maioridade o indivíduo teve sua massa multiplicada por 8, podemos associar os valores da seguinte maneira:

$$A_{Adulto} = k.(8m)^{\frac{2}{3}} = k.(8)^{\frac{2}{3}}(m)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8^2})\,k.(m)^{\frac{2}{3}}$$

$$A_{Adulto} = 4.\underbrace{k.(m)^{\frac{2}{3}}}_{A_{Infância}} \qquad A_{Adulto} = 4.A_{Infância}$$

Portanto, a área corporal do indivíduo foi multiplicada por 4.

## Questão 05 – Letra A

**Eixo cognitivo:** IV

**Competência de área:** 4

**Habilidade:** 17

**Comentário:** De acordo com a tabela, a classe espectral B0 tem uma temperatura em torno de 5 vezes maior que a do Sol. Sendo assim, a luminosidade é $2 \times 10^4$, ou seja, 20 000 vezes a luminosidade do Sol.

# MÓDULO – B 01

## Produtos notáveis e fatoração

### Exercícios de Fixação

#### Questão 01 – Letra E

**Comentário:**

Temos que $x = 4y \quad \frac{x}{y} = 4 \quad xy^{-1} = 4$.

Portanto, sabendo que $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$, encontramos $x^2 + y^{-2} = (x + y^{-1})^2 - 2xy^{-1} = (7)^2 - 2.(4) = 41$.

#### Questão 02 – Letra A

**Comentário:** Para fatorar o denominador, substituiremos 2 009 por **x**, a fim de facilitar os cálculos. Logo:

$2\,009^2 + 2\,009 - 2 \Rightarrow x^2 + x - 2$

Para fatorar essa equação, precisamos encontrar suas raízes. Assim, temos:

$$x^2 + x - 2 = 0 \qquad = 1^2 - 4.1.(-2) = 9$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{2} \qquad x = -2 \text{ ou } x = 1$$

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1) \qquad (2\,009 + 2)(2\,009 - 1)$$

Voltando à equação inicial, temos:

$$\frac{2\,009^2 - 4}{2\,009^2 + 2\,009 - 2} = \frac{(2\,009 + 2)(2\,009 - 2)}{(2\,009 + 2)(2\,009 - 1)} = \frac{2\,007}{2\,008}$$

#### Questão 03 – Letra C

**Comentário:** Para determinarmos o que foi pedido, devemos elevar ao quadrado os dois lados da equação dada.

Assim: $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \frac{10}{3} \Rightarrow \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\frac{10}{3}\right)^2 \Rightarrow$

$$a + 2.a^{\frac{1}{2}}.a^{-\frac{1}{2}} + a^{-1} = \frac{100}{9} \Rightarrow a + 2 + a^{-1} = \frac{100}{9} \Rightarrow$$

$$a + a^{-1} = \frac{100}{9} - 2 \Rightarrow a + a^{-1} = \frac{82}{9}$$

#### Questão 04 – Letra C

**Comentário:**

Agrupar e fatorar:

$a^2 - 2bc - b^2 - c^2 = 40 \Rightarrow a^2 - (b^2 + 2bc + c^2) = 40 \Rightarrow$

$a^2 - (b + c)^2 = 40 \Rightarrow (a - b - c)(a + b + c) = 40$

Por hipótese, $a - b - c = 10$.

Daí, $10(a + b + c) = 40 \Rightarrow a + b + c = 4$.

#### Questão 05 – Letra C

**Comentário:**

$(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^3 + 1$

### Exercícios Propostos

#### Questão 07 – Letra A

**Comentário:**

$$z = \frac{2x - 2y + ax - ay}{a^3 - a^2 - a + 1} \div \frac{2 + a}{a^2 - 1} = \frac{(x - y)(2 + a)}{(a - 1)(a^2 - 1)}.\frac{(a^2 - 1)}{(2 + a)} = \frac{x - y}{a - 1}$$

#### Questão 08 – Letra B

**Comentário:**

$$y = \frac{3x^3 + 3x^2 - 6x}{x^2 - 4} + \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x} = \frac{3x(x^2 + x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} + \frac{(x - 2)^2}{x(x - 2)} \Rightarrow$$

$$y = \frac{3x(x - 1)(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} + \frac{x - 2}{x} = \frac{3x(x - 1)}{x - 2} + \frac{x - 2}{x} \Rightarrow$$

$$y = \frac{3x^2(x - 1) + (x - 2)^2}{(x - 2)x} = \frac{3x^3 - 3x^2 + x^2 - 4x + 4}{(x - 2)x} \Rightarrow$$

$$y = \frac{3x^3 - 2x^2 - 4x + 4}{x(x - 2)}$$

#### Questão 10 – Letra C

**Comentário:**

$$\frac{ab}{b + c} = \frac{b^2 - bc}{a} \Rightarrow \frac{ab}{b + c} = \frac{b(b - c)}{a} \Rightarrow$$

$(b - c)(b + c) = a^2$, pois $a, b, c > 0$

Logo, $b^2 - c^2 = a^2 \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2$.

#### Questão 11 – Letra E

**Comentário:**

$N = 2\,002^2.2\,000 - 2\,000.1\,998^2 = 2\,000(2\,000^2 - 1\,998^2) \Rightarrow$

$N = 2\,000.(2\,002 + 1\,998)(2\,002 - 1\,998) = 2\,000.4\,000.4 \Rightarrow$

$N = 2.10^3.4.10^3.4 = 32.10^6$

#### Questão 13 – Letra E

**Comentário:**

$a^2 + 3b^2 = \frac{1}{a} \Rightarrow a^3 + 3ab^2 = 1$ (I)

$(a + b)^3 + (a - b)^3 =$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 =$

$2a^3 + 6ab^2 = 2(a^3 + 3ab^2)$

Como $a^3 + 3ab^2 = 1$ (I), temos:

$(a + b)^3 + (a - b)^3 = 2.1 = 2$

#### Questão 16

**Comentário:**

$[10^2 + 20^2 + 30^2 + ... + 100^2] - [9^2 + 19^2 + 29^2 + ... + 99^2] =$

$10^2 + 20^2 + 30^2 + ... + 100^2 - 9^2 - 19^2 - ... - 99^2 =$

$10^2 - 9^2 + 20^2 - 19^2 + 30^2 - 29^2 + ... + 100^2 - 99^2 =$

$(10 + 9)(10 - 9) + (20 + 19)(20 - 19) +$

$(30 + 29)(30 - 29) + ... + (100 + 99)(100 - 99) =$

$19 + 39 + 59 + 79 + 99 + 119 + 139 + 159 + 179 + 199 =$

1 090

#### Questão 17 – Letra D

**Comentário:**

$$(a^2b + ab^2)\frac{\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} = (a^2b + ab^2).\frac{\frac{b^3 - a^3}{a^3b^3}}{\frac{b^2 - a^2}{a^2b^2}} =$$

$$(a^2b + ab^2).\frac{b^3 - a^3}{a^3b^3}.\frac{a^2\,b^2}{b^2 - a^2} =$$

$$ab(a + b).\frac{(b - a)(b^2 + ab + a^2)}{ab(b + a)(b - a)} = b^2 + ab + a^2$$

MATEMÁTICA

## Questão 18 – Letra C

**Comentário:**

$(2x + y - z)^2 + (x - y)^2 + (z - 3)^2 = 0$

Para que a soma de três quadrados seja nula, cada um desses quadrados deve ser nulo, ou seja:

- $(z - 3)^2 = 0 \Rightarrow z - 3 = 0 \Rightarrow z = 3$
- $(x - y)^2 = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$
- $2x + y - z = 0 \Rightarrow 2x + x - 3 = 0 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$

Logo, $x + y + z = 1 + 1 + 3 = 5$.

## Questão 19 – Letra B

**Comentário:**

$x^9 - x = x(x^8 - 1) = x[(x^4)^2 - 1] = x(x^4 + 1)(x^4 - 1) =$

$x(x^4 + 1)[(x^2)^2 - 1] = x(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1) =$

$x(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

Portanto, 5 fatores.

## Questão 21 – Letra D

**Comentário:**

$$\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} + 1\right) = \left[\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right) - x^{\frac{1}{4}}\right]\left[\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right) + x^{\frac{1}{4}}\right] =$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right)^2 - \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 = x + 2x^{\frac{1}{2}} + 1 - x^{\frac{1}{2}} = x + x^{\frac{1}{2}} + 1$$

## Questão 22 – Letra C

**Comentário:**

$$\frac{ax^2 - ay^2}{x^2 - 4xy + 3y^2} = \frac{a(x^2 - y^2)}{x^2 - xy - 3xy + 3y^2} = \frac{a(x + y)(x - y)}{x(x - y) - 3y(x - y)} =$$

$$\frac{a(x + y)(x - y)}{(x - y)(x - 3y)} = \frac{a(x + y)}{x - 3y}$$

## Questão 23 – Letra B

**Comentário:**

$$\frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 3x + 1}$$

Vamos escrever cada trinômio do 2º grau da expressão anterior na forma fatorada:

- $3x^2 - 2x - 1$

  Raízes: $-\frac{1}{3}$ e 1

  Forma fatorada: $3(x - 1)\left(x + \frac{1}{3}\right) = (x - 1)(3x + 1)$

- $2x^2 - 3x + 1$

  Raízes: $\frac{1}{2}$ e 1

  Forma fatorada: $2(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x - 1)(2x - 1)$

Substituindo na expressão, temos:

$$\frac{(x - 1)(3x + 1)}{(x - 1)(2x - 1)} = \frac{3x + 1}{2x - 1}$$

# Seção Enem

## Questão 01 – Letra B

**Eixo cognitivo:** III

**Competência de área:** 2

**Habilidade:** 8

**Comentário:** A figura é formada por um quadrado de lado **a**, um quadrado de lado **b** e dois retângulos de dimensões **a** e **b**. Além disso, a soma das áreas dessas figuras é igual à área do quadrado maior, de lado a + b. Temos, então:

$$\underbrace{(a + b)^2}_{\text{Área do quadrado maior}} = \underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_{\text{Soma das áreas dos quadrados menores e dos dois retângulos}}$$

Logo, a figura é a representação geométrica do produto notável $(a + b)^2$.

## Questão 02 – Letra A

**Eixo cognitivo:** III

**Competência de área:** 5

**Habilidade:** 21

**Comentário:** Fatorando a expressão, obtemos:

$A = 4\,000(206^2 - 204^2)$

$A = 4\,000(206 - 204)(206 + 204)$

$A = 4\,000.2.410 = 3\,280\,000$

# MÓDULO – B 02

# Divisibilidade, MDC e MMC

## Exercícios de Fixação

## Questão 01 – Letra E

**Comentário:**

$N = 16^{15} + 2^{56} = (2^4)^{15} + (2^4)^{14}(1 + 2^4) = (2^4)^{14}.(17)$

Portanto, como **N** apresenta o número 17 na sua decomposição em fatores primos, dizemos que **N** é divisível por 17.

## Questão 02 – Letra B

**Comentário:** Inicialmente, calculamos a quantidade de horas que existem em 30 dias. Para isso, basta fazer 30.24 = 720 horas. Para saber quantas vezes que os remédios foram tomados simultaneamente, basta contarmos quantos múltiplos comuns de 4, 5 e 6 existem entre 1 e 720 e somarmos com a primeira vez em que o remédio foi tomado. Logo:

$$\text{MMC}(4, 5, 6)\ \begin{cases} 4 = 2^2 \\ 5 = 5 \\ 6 = 2.3 \end{cases} \quad \text{MMC} = 2^2.3.5 = 60$$

$$\text{Múltiplos}(4, 5, 6) = \underbrace{60, 120, 180, \ldots, 720}_{\text{quantidade de múltiplos} = \frac{720}{60} = 12}$$

Portanto, o número de vezes em que os três remédios foram ingeridos simultaneamente foram: 12 + 1 = 13

## Questão 03 – Letra E

**Comentário:** Basta decompor o número natural $10^{63} - 10^{61}$ em fatores primos e determinar o expoente do número 3.

Assim: $10^{63} - 10^{61} = 10^{61}(10^2 - 1) = (2.5)^{61}(99) =$

$2^{61}.5^{61}.9.11 = 2^{61}.3^2.5^{61}.11$

Portanto, o expoente do número 3 é 2.

## Questão 04 – Letra D

**Comentário:** Seja $\ell$ a quantidade de laranjas, em que $500 < \ell < 1\,500$. Ao dividir as $\ell$ laranjas em sacos com 50 e 36 unidades, sobrariam 12 laranjas. Logo:

$$\begin{array}{l|l} \ell & 50 \\ \hline 12 & q_1 \end{array} \Rightarrow \ell = 50q_1 + 12 \Rightarrow \ell - 12 = 50q_1,$$ ou seja, $\ell - 12$ é um múltiplo de 50, e

$\begin{array}{r|l} \ell & 36 \\ \hline 12 & q_2 \end{array} \Rightarrow \ell = 36q_2 + 12 \Rightarrow \ell - 12 = 36q_2$, ou seja, $\ell - 12$ é um múltiplo de 36.

Como $50 = 2.5^2$ e $36 = 2^2.3^2$, temos que MMC (50, 36) = $2^2.3^3.5^2$.

Assim, MMC (50, 36) = 900, e os outros múltiplos comuns de 50 e 36 são: (1 800, 2 700, 3 600, ...)

Entretanto, temos que $500 < \ell < 1\ 500$, e, logo:

$488 < \ell - 12 < 1\ 488$

Então, $\ell - 12 = 900$, e, portanto, $\ell = 912$.

Enfim, $\begin{array}{r|l} 912 & 35 \\ \hline 2 & 26 \end{array}$.

Portanto, se as laranjas fossem colocadas em sacos com 35 unidades cada um, sobrariam 2 laranjas.

## Questão 05 – Letra D

**Comentário:**

Seja **r** o número de páginas restantes após o dia **x**. De acordo com o enunciado, podemos escrever:

$$675 - 25x = r \quad (I)$$
$$615 - 15x = r \quad (II)$$

Fazendo (I) – (II), temos:

$$675 - 25x - (615 - 15x) = r - r \qquad 60 - 10x = 0 \qquad x = 6$$

# Exercícios Propostos

## Questão 01 – Letra A

**Comentário:**

Tempo total até a colheita:

$V_1 \Rightarrow 4 + 3 + 1 = 8$ semanas

$V_2 \Rightarrow 2 + 3 + 1 = 6$ semanas

$V_3 \Rightarrow 1 + 2 + 1 = 4$ semanas

O tempo necessário para que a colheita seja simultânea é igual ao MMC de 8, 6 e 4.

MMC (8, 6, 4) = 24

Logo, são necessárias 24 semanas.

## Questão 02 – Letra C

**Comentário:**

Sejam **a** e **b** números naturais. De acordo com o enunciado, temos:

$$\begin{array}{r|l} 218 & n \\ \hline 11 & a \end{array} \text{ (quociente)} \qquad 218 = an + 11 \qquad an = 207 \qquad an = 3^2.23 \quad (I)$$

$$\begin{array}{r|l} 172 & n \\ \hline 11 & b \end{array} \text{ (quociente)} \qquad 172 = bn + 11 \qquad bn = 161 \qquad bn = 7.23 \quad (II)$$

Comparando as expressões I e II, percebemos que n = 23, pois é o fator que repete nas equações. Logo, dividindo esse número por 11, obtemos resto 1.

## Questão 03 – Letra C

**Comentário:**

750 – 40 = 710

$\begin{array}{r|l} 710 & 3 \\ \hline 2 & 236 \end{array}$

O acidente ocorreu 2 km à frente do último telefone. Logo, o próximo telefone encontra-se 1 km à frente.

## Questão 05 – Letra D

**Comentário:**

Sejam **a**, **b** e **c** números naturais. De acordo com o enunciado, temos:

x = 2a

y = 5b

z = 8c

Como **x**, **y**, e **z** são consecutivos, podemos escrever:

y = x + 1

z = x + 2

Substituindo **y** e **z** nas equações iniciais, temos:

$$\begin{array}{l} x = 2a \\ y = 5b \\ z = 8c \end{array} \qquad \begin{array}{l} x = 2a \\ x + 1 = 5b \\ x + 2 = 8c \end{array} \qquad \begin{array}{l} \frac{x}{2} = a \\ \frac{x+1}{5} = b \\ \frac{x+2}{8} = c \end{array}$$

Como a + b + c = 12, podemos escrever:

$$\frac{x}{2} + \frac{x+1}{5} + \frac{x+2}{8} = 12 \qquad \frac{20x + 8x + 8 + 5x + 10}{40} = 12$$

$$33x + 18 = 480 \qquad x = 14$$

Logo,

$$\begin{array}{l} y = x + 1 \\ z = x + 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} y = 15 \\ z = 16 \end{array}$$

Portanto, a média aritmética entre esses números será:

$$\frac{14 + 15 + 16}{3} = 15$$

## Questão 07 – Letra A

**Comentário:**

$x = 3\ 600 = 2^4.3^2.5^2$

- Total de divisores (p)

  p = (4 + 1).(2 + 1).(2 + 1) = 5.3.3 = 45

- Para termos divisores pares, basta que o expoente do fator 2 não seja nulo, havendo então 4, e não 5, possibilidades de escolha desse expoente.

  Logo:

  q = 4(2 + 1)(2 + 1) = 36

## Questão 10

**Comentário:**

A) Sabemos que MDC (a, b).MMC (a, b) = a.b.

Logo, podemos escrever:

$$\text{MDC (a, b).MMC (a, b)} = a.b \qquad 5.105 = 35.b \qquad b = 15$$

B) O número 5 é fator de a e b pois é o MDC entre esses números. Temos ainda que:

$$\text{MDC (a, b).MMC (a, b)} = a.b \qquad 5.105 = a.b$$
$$5.(5.7.3) \qquad a.b = 3.5^2.7$$

Portanto, os possíveis valores de a e b serão:

$a = 5.3$
$b = 5.7$ $\quad (a, b) = (15, 35)$

$a = 5.7$
$b = 5.3$ $\quad (a, b) = (35, 15)$

$a = 5$
$b = 5.7.3$ $\quad (a, b) = (5, 105)$

$a = 5.3.7$
$b = 5.$ $\quad (a, b) = (105, 5)$

## Questão 15 – Letra A

**Comentário:**

Na expressão $m = \frac{3p}{7}$, o menor valor de **p** que mantém **m** inteiro é 7.

$$m = \frac{3p}{7} \underset{p=7}{\quad} m = \frac{3.7}{7} \quad m = 3$$

Logo,

$n = 48 - 3p \quad n = 48 - 3.7 \quad n = 27$

Portanto, $m + n = 3 + 27 = 30$.

## Questão 18 – Letra B

**Comentário:** Os números que possuem exatamente três divisores positivos são os quadrados dos números primos. Portanto, esses números são 4, 9, 25, 49, 121, cuja soma é igual a 4 + 9 + 25 + 49 + 121 = 208.

## Questão 22 – Letra B

**Comentário:**

Seja **x** o número de ações. Temos:

$$\begin{array}{l|l} x & 3 \\ \hline 1 & q \end{array} \Rightarrow x - 1 \text{ é múltiplo de } 3$$

$$\begin{array}{l|l} x & 4 \\ \hline 3 & m \end{array} \Rightarrow x + 1 \text{ é múltiplo de } 4$$

- Sabe-se que $30 < x < 40$; então, $29 < x - 1 < 39$. Como $x - 1$ é múltiplo de 3, temos as seguintes possibilidades:
  $x - 1 = 30 \Rightarrow x = 31$
  $x - 1 = 33 \Rightarrow x = 34$
  $x - 1 = 36 \Rightarrow x = 37$

- Além disso, temos $31 < x + 1 < 41$, com $x + 1$ mútiplo de 4. Temos:
  $x + 1 = 32 \Rightarrow x = 31$
  $x + 1 = 36 \Rightarrow x = 35$
  $x + 1 = 40 \Rightarrow x = 39$

O único valor que satisfaz as duas condições é x = 31. Portanto, temos $\begin{array}{l|l} 31 & 4 \\ \hline 3 & 7 \end{array}$, ou seja, cada neto receberá 7 ações.

## Questão 24 – Letra B

**Comentário:** Temos que 5n9 é divisível por 9, ou, pelo critério de divisibilidade por 9, que 5 + n + 9 é divisível por 9, ou seja, 5 + n é divisível por 9. Como **n** é um algarismo de um número, $0 \le n \le 9$, e, então, $5 \le 5 + n \le 14$. O único múltiplo de 9 nesse intervalo é o próprio 9; assim:

$5 + n = 9 \Rightarrow n = 4$

Foi dado ainda que:

2m3 + 326 = 5n9

Reescrevendo a expressão anterior, utilizando a notação de valor relativo dos algarismos, temos:

$2.100 + m.10 + 3 + 3.100 + 2.10 + 6 = 5.100 + n.10 + 9 \Rightarrow$
$m + 2 = n \Rightarrow m = 2$

Logo, m + n = 2 + 4 = 6.

## Questão 26 – Letra D

**Comentário:**

Como a diferença p − q = 41 é um número ímpar, um desses números precisa ser par, pois a diferença entre dois números pares ou ímpares é sempre par. Como o único número primo par existente é o 2, então q = 2. Portanto, $p - q = 41 \underset{q=2}{\quad} p = 43$.

Logo,

p + q = 43 + 2 = 45

## Questão 27 – Letra A

**Comentário:**

De acordo com o enunciado e com a Divisão Euclidiana, podemos escrever:

$$\begin{array}{l|l} x & 37 \\ \hline y^3 & y \end{array} \qquad 0 \le y^3 < 37 \qquad \begin{array}{l} y = 0 \text{ (não convém, pois } \mathbf{x} \text{ é positivo)} \\ y = 1 \\ y = 2 \\ y = 3 \end{array}$$

Como queremos a soma dos dividendos, basta substituir o valor de **y** na divisão inicial. Portanto, como $x = 37y + y^3$, temos:

$$\begin{array}{lll} y = 1 & x = 37.1 + 1^3 = 38 & \\ y = 2 & x = 37.2 + 2^3 = 82 & 38 + 82 + 138 = 258 \\ y = 3 & x = 37.3 + 3^3 = 138 & \end{array}$$

## Questão 28 – Letra D

**Comentário:** Os números da forma 2n são os divisores pares de 150. Temos $150 = 2.3.5^2$.

Para termos divisores pares, basta que o expoente do fator 2 não seja nulo. Há, então, duas possibilidades para o expoente do fator 3 e três para o do fator 5, havendo, então, 2.3 = 6 divisores pares de 150, ou seja, 6 valores possíveis para **n**.

## Questão 30 – Letra D

**Comentário:** O primeiro sinal tem um ciclo de 50 segundos, e o segundo sinal tem um ciclo de 40 segundos. O tempo necessário para que os sinais voltem a fechar juntos é dado por MMC (40, 50) = 200 segundos.

## Questão 31

**Comentário:** Seja **N** o número de peças analisadas por funcionário. Para que seja necessário o menor número de funcionários, **N** deve ser máximo. Portanto:

N = MDC (9 000, 2 700, 4 050) = 450

Temos:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{array}{l|l} 9\,000 & 450 \\ \hline & 20 \text{ funcionários} \end{array} \\ \begin{array}{l|l} 2\,700 & 450 \\ \hline & 6 \text{ funcionários} \end{array} \\ \begin{array}{l|l} 4\,050 & 450 \\ \hline & 9 \text{ funcionários} \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{total} = 35 \text{ funcionários}$$

## Questão 32 – Letra D

**Comentário:** Seja **N** o maior número de alunos contemplados. Sabe-se que MDC (1 260, 9 072) = 252.

Então, temos N = 252.

$$\left.\begin{array}{l} 1\,260 \,\underline{|252} \\ \quad\quad 5 \quad \text{amarelas} \\ 9\,072 \,\underline{|252} \\ \quad\quad 36 \quad \text{verdes} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{total} = 41 \text{ bolas por aluno}$$

## Questão 34 – Letra D

**Comentário:**

- Em 2007 – 365 dias

  A partir do dia 01/01/07 (segunda-feira), temos 364 dias

  $365 \,\underline{|7}$

  $1 \quad 52$

  Logo, o 1º dia de 2008 será segunda + 1 = terça.

- Em 2008 – 366 dias (bissexto)

  A partir do dia 01/01/08 (terça-feira), temos 365 dias

  $365 \,\underline{|7}$. Logo, 1º dia de 2009 será terça + 2 = quinta.

  $1 \quad 52$

Observamos, pelos exemplos apresentados, que, a cada passagem de um ano comum, avançamos um dia na semana, em relação ao primeiro dia do ano anterior. Se o ano for bissexto, avançamos dois dias na semana.

Em 2008 – terça

Em 2009 – quinta (2008 foi bissexto)

Em 2010 – sexta

Em 2011 – sábado

Em 2012 – domingo

Em 2013 – terça (2012 foi bissexto)

Em 2014 – quarta

Em 2015 – quinta

Em 2016 – sexta

Em 2017 – domingo (2016 foi bissexto)

Em 2018 – segunda

**Resposta:** 2018

# Seção Enem

## Questão 01 – Letra E

**Eixo cognitivo:** III

**Competência de área:** 1

**Habilidade:** 3

**Comentário:**

Como 38 = 3.10 + 8, 8 é o resto da divisão de 38 por 10, sendo, então, o referido dígito verificador.

## Questão 02 – Letra A

**Eixo cognitivo:** III

**Competência de área:** 1

**Habilidade:** 3

**Comentário:**

Cálculo de $d_1$:

1.10 + 2.9 + 3.8 + 4.7 + 5.6 + 6.5 + 7.4 + 8.3 + 9.2 = 210

$210 \,\underline{|11}$

$1 \quad 19$

Logo, $d_1 = 0$.

Cálculo de $d_2$:

2.10 + 3.9 + 4.8 + 5.7 + 6.6 + 7.5 + 8.4 + 9.3 + 0.2 = 244

$244 \,\underline{|11}$

$2 \quad 22$

Logo, $d_2 = 11 - 2 = 9$.

# MÓDULO – C 01

# Teoria dos conjuntos

## Exercícios de Fixação

## Questão 01

**Comentário:**

Observação: Sempre começar atribuindo o valor da intersecção dos três conjuntos. Em seguida, atribuir o valor das outras três interseções, sem se esquecer de subtrair do valor da intersecão dos três conjuntos. Por fim, completar o número de elementos que pertencem a apenas um dos conjuntos.

A) 85 + 45 + 15 + 5 + 35 + 25 + 35 + 70 = 315
B) 45 + 25 + 5 = 75
C) 85 + 45 + 35 + 70 = 235
D) 85 + 70 = 155

## Questão 02

**Comentário:** Como 31 são morenas, logo, $\underset{\text{Total}}{50} - \underset{\text{Morenas}}{31} = 19$ são louras.

Como 14 são louras com olhos azuis, logo, $\underset{\text{Louras}}{19} - \underset{\text{Louras com olhos azuis}}{14} = 5$ são louras com olhos castanhos.

Como 18 pessoas tem os olhos castanhos, e, dessas, 5 são louras, logo, 18 – 5 = 13 são morenas de olhos castanhos.

## Questão 03 – Letra B

**Comentário:** Usar o Diagrama de Venn.

Observação: Sempre começar atribuindo o valor da interseção dos três conjuntos. Em seguida, atribuir o valor das outras três interseções, sem se esquecer de subtrair do valor da interseção dos três conjuntos.

Do fato de que o número de consumidores de banana é igual ao de consumidores de maçã, temos:

$a + 25 + 100 + 30 = b + 20 + 100 + 30 \Rightarrow a + 5 = b$

Assim:

$40 + 25 + 100 + 20 + a + 30 + b = 400 \Rightarrow$

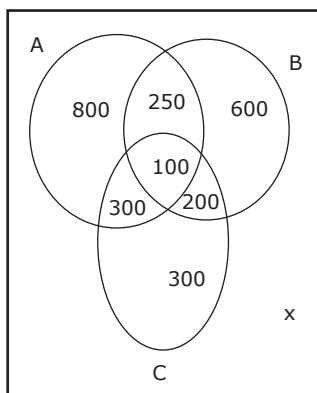
$215 + a + a + 5 = 400 \Rightarrow 2a = 180 \Rightarrow a = 90$

Logo, $b = 95$.

Daí, o número de pessoas que consomem maçã e não consomem laranja é igual a $b + 30 = 95 + 30 = 125$.

## Questão 04 – Letra C

**Comentário:**

Observação: Sempre começar atribuindo o valor da interseção dos três conjuntos. Em seguida, atribuir o valor das outras três interseções, sem se esquecer de subtrair do valor da interseção dos três conjuntos. Por fim, completar o número de elementos que pertencem a apenas um dos conjuntos.

Seja **x** o número de telespectadores que não acha agradável nenhuma das três novelas. Como o total de pessoas entrevistadas foi 3 000, podemos dizer, de acordo com o diagrama, que o valor de **x** será:

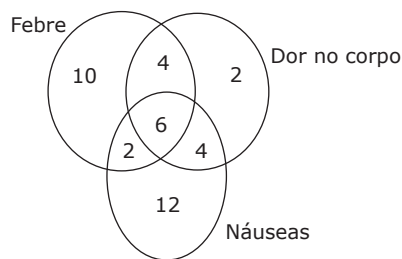
$3\,000 = 800 + 250 + 300 + 100 + 200 + 600 + 300 + x \Rightarrow$
$3\,000 = 2\,550 + x \Rightarrow x = 450$

## Questão 05 – Letra D

**Comentário:** Note que a região amarela é a região comum a **A** e a **C**, mas não a **B**. Logo, um elemento dessa região é um elemento que pertence a **A**, pertence a **C**, mas não pertence a **B**, ou seja, pertence a $\overline{B}$. Logo, a região representa $A \cap \overline{B} \cap C$.

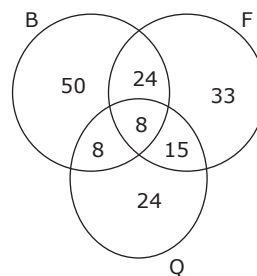
# Exercícios Propostos

## Questão 02 – Letra C

**Comentário:** De acordo com os dados da tabela apresentada no exercício, podemos escrever:

Logo, o número de pacientes atendidos no posto será dado por:

$10 + 4 + 6 + 2 + 2 + 4 + 12 = 40$

## Questão 06 – Letra B

**Comentário:** De acordo com os dados do enunciado, temos:

Portanto, o valor de **N** será:

$N = 50 + 24 + 8 + 8 + 15 + 33 + 24 = 162$

## Questão 11 – Letra C

**Comentário:** Observe a tabela a seguir, em que as variáveis expressam a quantidade de candidatos em cada situação.

| Sexo / Modalidade | Administração de empresas | Administração pública |
|---|---|---|
| Masculino | x | y |
| Feminino | z | w |

Assim, em linguagem matemática, as conclusões dadas no enunciado são:

i) $x + z = 4(y + w)$

ii) $3(x + y) = 7(z + w)$

iii) $y = w$

iv) $w = 500$

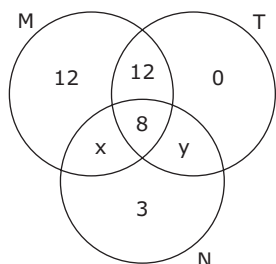
Substituindo-se as condições iii e iv nas condição i e ii, temos:

$x + z = 4\,000$

$3x - 7z = 2\,000$

Somando à segunda equação sete vezes a primeira, obtemos $x = 3\,000$.

## Questão 12 – Letra C

**Comentário:** Sejam **M**, **T** e **N** os conjuntos dos alunos que frequentaram as piscinas pela manhã, pela tarde e pela noite, respectivamente. Note que "sendo 20 pela manhã e à tarde" faz referência ao conjunto $M \cap T$. O número de alunos que frequentaram as piscinas somente pela manhã e à tarde é igual ao número de alunos que o fizeram pela manhã e à tarde menos o número de alunos que o fizeram pela manhã, tarde e noite, ou seja, $20 - 8 = 12$. Observe o Diagrama de Venn a seguir:

Sabemos que o número total de alunos que frequentaram as piscinas é 38, ou seja, 12 + 12 + 0 + x + 8 + y + 3 = 38. Logo, x + 8 + y + 3 = 14. Note que a soma anterior expressa o número de alunos que frequentaram a piscina à noite.

## Questão 13 – Letra D

**Comentário:** O total de espécies em extinção é:

160 + 16 +20 + 69 = 265

Como 175 das espécies ameaçadas viviam somente na Mata Atlântica e 75 somente fora dela, podemos dizer que 265 – 175 – 75 = 15 espécies vivem nos dois lugares.

## Questão 14 – Letra D

**Comentário:** Primeiramente, excluem-se as alternativas A e C, pois, pelas Leis de Morgan, apenas as alternativas B e D apresentam expressões equivalentes. Todo indivíduo ou é homem ou é mulher, de forma que buscar por indivíduos mulheres equivale a buscar elementos em $A^C$. Todo indivíduo ou nasceu em Uberlândia ou nasceu em outra cidade, de forma que buscar por indivíduos nascidos em outra cidade equivale a buscar elementos em $B^C$. Buscamos indivíduos que sejam mulheres e tenham nascido em outra cidade, ou seja, elementos que estejam em $A^C$ e em $B^C$, estando, assim, em $A^C \cap B^C$.

## Questão 17 – Letra A

**Comentário:** Inicialmente, podemos definir:

I) a = total de pessoas que leem somente a revista **A**.

II) b = total de pessoas que leem somente a revista **B**.

III) c = total de pessoas que leem somente a revista **C**.

IV) x = total de pessoas que leem a revista **A** e **B**.

V) y = total de pessoas que leem a revista **B** e **C**.

VI) z = total de pessoas que leem as revistas **A** e **C**.

VII) m = total de pessoas que leem as 3 revistas (pessoas mais bem informadas).

Sabemos que:

17 leem duas das três revistas, logo, x + y + z = 17.

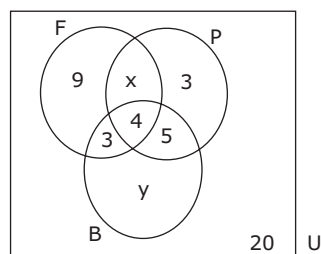
61 leem apenas uma delas, logo, a + b + c = 61.

81 leem pelo menos uma delas, logo:

$$\underbrace{x + y + z}_{17} + \underbrace{a + b + c}_{61} + m = 81 \quad m = 3$$

Portanto, existem 3 pessoas mais bem informadas entre as 81 entrevistadas.

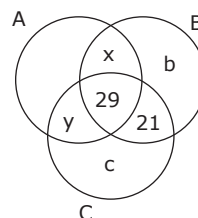
## Questão 18 – Letra C

**Comentário:** Considere o conjunto dos alunos entrevistados como o conjunto universo, e **F**, **P** e **B** como os conjuntos dos alunos que optaram por frango, peixe e carne bovina, respectivamente. Note que, por exemplo, em "7 por carne bovina e frango", faz-se referência ao conjunto $B \cap F$. Observe o Diagrama de Venn a seguir:

Do dado que 36 pessoas não optaram por carne bovina ($B^c$ tem 36 elementos), equacionamos 9 + x + 3 + 20 = 36 ⇒ x = 4, e do dado que 42 pessoas não optaram por peixe ($P^c$ tem 42 elementos), equacionamos 9 + 3 + y + 20 = 42 ⇒ y = 10. Assim, foram entrevistadas

9 + x + 3 + 3 + 4 + 5 + y + 20 =

9 + 4 + 3 + 3 + 4 + 5 + 10 + 20 = 58 pessoas.

## Questão 19

**Comentário:** Como $\frac{1}{3}$ de todos os alunos foram aprovados em todas as universidades, então, a intersecção dos três conjuntos será $\frac{87}{3} = 29$. Dos alunos aprovados em **B**, 50 também foram aprovados em **C**, logo, para completar a intersecção entre **B** e **C** faltam 21 alunos. A partir desses valores, considere o diagrama a seguir:

O total de alunos aprovados em **A** é 51, logo:

x + y + 29 = 51 ⇒ x + y = 22

Sabemos, também, que o total de alunos é 87. Portanto, como todos os 87 alunos foram aprovados em pelo menos uma das universidades, temos:

$$\underbrace{x + y}_{22} + b + c + 29 + 21 = 87 \quad b + c = 87 - 29 - 21 - 22 \quad b + c = 15$$

Os alunos aprovados em apenas um dos três vestibulares é dado pela soma b + c, logo, o valor procurado é 15.

# Seção Enem

## Questão 01 – Letra C

**Eixo cognitivo:** II

**Competência de área:** 1

**Habilidade:** 2

**Comentário:** A quantidade de mulheres que tem certeza que os homens odeiam ir ao shopping e pensa que eles preferem que elas façam todas as tarefas da casa, será dada por:

(72% + 65% – 100%).300 = 111

## Questão 02 – Letra C

**Eixo cognitivo:** II

**Competência de área:** 6

**Habilidade:** 24

**Comentário:**

i) Inicialmente, temos a + b + c + d + e + f = 250.

ii) Se 32% dos alunos são homens, temos que d + e + f = 32%.250 ⇒ d + e + f = 80.

iii) Se 40% dos homens estão na primeira série, temos que

d = 40%.80 ⇒ d = 32.

iv) Logo, já podemos assumir que e + f = 48.

v) Se 20% dos alunos estão na terceira série, temos que c + f = 20%.250 ⇒ c + f = 50.

vi) Se 10 alunos da terceira série são homens, c = 40 e f = 10.

vii) De ii, temos e = 38.

viii) Entre os alunos da segunda série, o número de mulheres é igual ao número de homens; assim, temos, de vii, que b = 38.

Concluindo, de i, temos que a = 92.

## Questão 03 – Letra C

**Eixo cognitivo:** IV

**Competência de área:** 6

**Habilidade:** 26

**Comentário:** No gráfico "Por que vive na rua?", somando o percentual indicado em cada barra, temos:

36% + 30% + 30% + 20% + 16% = 132%.

Logo, algumas pessoas declaram vários motivos para viverem na rua.

## Questão 04 – Letra A

**Eixo cognitivo:** IV

**Competência de área:** 6

**Habilidade:** 26

**Comentário:** Sejam **A** o percentual de pessoas que vivem na rua por alcoolismo / drogas, mas não por decepção amorosa; **B** o percentual de pessoas que vivem na rua por decepção amorosa, mas não por alcoolismo / drogas; e **X** o percentual de pessoas que vivem na rua devido a alcoolismo / drogas e decepção amorosa, simultaneamente. Desejamos calcular **X**.

Pelos dados apresentados no gráfico, temos:

$$\begin{cases} A + X = 36\% \\ B + X = 16\% \\ A + B + X = 40\% \end{cases} \quad \begin{cases} A + B + 2X = 52\% \\ A + B + X = 40\% \end{cases} \quad X = 12\%$$

## Questão 05 – Letra A

**Eixo cognitivo:** III

**Competência de área:** 1

**Habilidade:** 3

**Comentário:** Basta analisar os três casos possíveis:

1º) O posto **X** encerra suas atividades.
Nesse caso, o posto **Y** ganha mais 45 fregueses, totalizando 70. Já o posto **Z** continua com os 25 fregueses iniciais.

2º) O posto **Y** encerra as suas atividades.
Nesse caso, o posto **Z** ganha mais 25 pessoas, chegando a 55. Já o posto **X** continua com os 45 fregueses iniciais.

3º) O posto **Z** encerra as suas atividades.
Nesse caso, o posto **Y** ganha mais 30 pessoas, ficando com 55. Já o posto **X** mantém os 45 fregueses.

Assim, a preferência nunca pertencerá a **X**.

## Questão 06 – Letra D

**Eixo cognitivo:** II

**Competência de área:** 1

**Habilidade:** 4

**Comentário:** Vamos analisar as possibilidades para cada candidato.

1ª) O candidato **X** terá entre 33% e 39% dos votos.

2ª) O candidato **Y** terá entre 30% e 36% dos votos.

3ª) O candidato **Z** terá entre 28% e 34% dos votos.

Logo, os três candidatos podem vencer. Note que o candidato **Z** só vencerá se obtiver 34% dos votos e se **X** e **Y** conseguirem 33%.

# MÓDULO – C 02

## Conjuntos numéricos

## Exercícios de Fixação

### Questão 01 – Letra B

**Comentário:**

Para facilitar a análise das alternativas, considere o seguinte diagrama:

Portanto, temos que $\pi \in \mathbb{R}$ e $i \notin \mathbb{R}$. Logo, a alternativa B é a correta.

### Questão 02 – Letra D

**Comentário:**

$$x + y = 0{,}9494... + 0{,}060606... = \frac{94}{99} + \frac{06}{99} = \frac{100}{99}$$

### Questão 03 – Letra D

**Comentário:**

A) Verdadeiro, pois, quando a representação decimal infinita de um número é periódica, trata-se de uma dízima periódica. Logo, esse número decimal pode ser transformado em uma fração, ou seja, ele é um número racional.

B) Verdadeiro, pois, quando a representação decimal de um número é finita, ele pode ser transformado em uma fração.

C) Verdadeiro, pois números com representação decimal finita são racionais.

D) Falso. Contraexemplo: $\frac{2}{3}$ = 0,666..., ou seja, $\frac{2}{3}$ é um número racional, e sua representação decimal é infinita.

### Questão 04 – Letra C

**Comentário:**

Temos que: $\frac{x}{y} = 7{,}3636... \Rightarrow \frac{x}{y} = 7{,}\overline{36} \Rightarrow$

$$\frac{x}{y} = \frac{736 - 7}{99} \quad \frac{x}{y} = \frac{729}{99} \quad \frac{x}{y} = \frac{81}{11}$$

$\frac{x}{y} = \frac{81}{11} = \frac{162}{22} = \frac{243}{33} = ...$, pois são frações equivalentes.

Da divisão de Euclides, temos $\begin{array}{r|l} x & y \\ \hline 8 & z \end{array}$.

Tome x = 81 e y = 11 ⇒ $\begin{array}{r|l} 81 & 11 \\ \hline 4 & 7 \end{array}$

Opção inválida, pois dá resto 4.

Tome x = 162 e y = 22 ⇒ $\begin{array}{r|l} 162 & 22 \\ \hline 8 & 7 \end{array}$

Opção válida, pois dá resto 8.

Logo, x + y + z = 162 + 22 + 7 = 191.

## Questão 05 – Letra D

**Comentário:**

A) Falso. Contra-exemplo: $\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2$

B) Falso. Contra exemplo: $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2$

C) Falso. Existem infinitos números irracionais.

D) Verdadeiro. Sendo **x** e **y** dois números racionais (exceto o zero), o número $\frac{x+y}{2}$ está entre esses números, e é racional.

E) Falso. Contra exemplo: –1 – (–1) = 0

# Exercícios Propostos

## Questão 04 – Letra D

**Comentário:**

A) $\sqrt{\pi^4} = \pi^2$, que é irracional.

B) $\sqrt[3]{0,1} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$, que é irracional.

C) $\sqrt[3]{0,27} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{100}} = \frac{3}{\sqrt[3]{100}}$, que é irracional.

D) $\sqrt[3]{-0,064} = \frac{\sqrt[3]{-64}}{\sqrt[3]{1\,000}} = \frac{-4}{10} = -0,4$, que é racional.

E) $\sqrt[4]{0,016} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{1\,000}} = \frac{2}{\sqrt[4]{1\,000}}$, que é irracional.

## Questão 07 – Letra D

**Comentário:** Como $\frac{p}{q} = 0,\overline{65} = \frac{65}{99}$ e se trata de uma fração irredutível, então podemos concluir que p = 65 e q = 99.

Logo, temos que:

$$y = \frac{65-1}{99+1}^{\frac{1}{2}} - \frac{99-18}{3(65-1)}^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{64}{100}} - \sqrt[3]{\frac{81}{192}} \Rightarrow$$

$$y = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{20}$$

## Questão 09 – Letra C

**Comentário:**

A) Falso. Como **M** é o ponto médio de AB, então:

$$M = \frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{23}{40} = 0,575$$

B) Falso. Como **N** é o ponto médio de BY, então: $N = \frac{\frac{3}{4} + 1}{2} = \frac{7}{8}$

C) Verdadeiro. De acordo com as alternativas anteriores, $M = \frac{23}{40}$ e $N = \frac{7}{8}$

D) Falso. $M = \frac{23}{40}$

E) Falso. Pois M=0,575 e N=0,875.

## Questão 10 – Letra E

**Comentário:** Os números $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ e 4 são racionais, o que contradiz, respectivamente, as alternativas A e D, e B e C.

## Questão 12 – Letra B

**Comentário:**

I) A = {x ∈ □ | 2 < x < 20}

II) B = {0, 2, 4, 6, 8...}

III) C = {40, 20, 10, 8, 5, 4, 2, 1}

Portanto, (A ∩ B) ∩ C = {4, 8, 10}, ou seja, três elementos.

## Questão 15 – Letra D

**Comentário:** Se dois conjuntos são iguais, todo elemento de um pertence também ao outro. A alternativa A é falsa, pois 3, por exemplo, pertence a **B**, mas não a **A**, de forma que 3 ∈ (A ∪ B), mas 3 ∉ A. A alternativa B é falsa, pois 0,5, por exemplo, pertence a **A**, mas não a □, de forma que 0,5 ∈ (A ∪ B), mas 0,5 ∉ □. A alternativa C é falsa, pois –2, por exemplo, pertence a **A**, mas não a **B**, de forma que –2 ∈ A, mas –2 ∉ A ∩ B. A alternativa E é falsa, pois 3 pertence a **B**, mas não a **A**, de forma que 3 ∈ B, mas 3 ∉ A ∩ B. A alternativa D é verdadeira, pois **B** é um subconjunto de □, e A ∩ B é um subconjunto de **B**, de forma que A ∩ B é um subconjunto de □.

## Questão 16 – Letra B

**Comentário:**

I) Falso. Contraexemplo: a < b: $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ $3 > 2$

II) Verdadeiro

III) Falso. Se b ≠ 0 e c ≠ 0, então (a ÷ b) ÷ c = a ÷ (b ÷ c).

Se a = 3, b = 6 e c = 2 ⇒ (3 ÷ 6) ÷ 2 ≠ 3 ÷ (6 ÷ 2) ⇒ $\frac{1}{2} \div 2 \neq 3 \div 3 \Rightarrow \frac{1}{4} \neq 1$

Portanto, a única afirmação correta é a II.

## Questão 17 – Letra B

**Comentário:** Foi dado que 0 < y < 1. Multiplicando as desigualdades por **x** (sem invertê-las, pois x > 0), temos 0 < xy < x. Logo, xy está entre zero e **x**.

# Seção Enem

## Questão 01 – Letra D

**Eixo cognitivo:** I

**Competência de área:** 1

**Habilidade:** 1

**Comentário:** $8.\frac{3}{4} = 6$

Calculando as somas sugeridas em cada alternativa, temos:

A) $24.\frac{1}{32} = \frac{3}{4}$

B) $3.\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

C) $8.\frac{1}{4} = 2$

D) $24.\frac{1}{8} + 12.\frac{1}{4} = 3 + 3 = 6$

E) $16.\frac{1}{4} + 8.\frac{1}{16} = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

Dessa forma, vemos que a única alternativa correta é a letra D.

## Questão 02 – Letra B

**Eixo cognitivo:** IV

**Competência de área:** 1

**Habilidade:** 4

**Comentário:** Sabemos que o ano 0, para os astrônomos, refere-se ao ano 1 a.C. Assim, o ano 2 a.C. corresponde ao ano –1, e o ano 3 a.C., ao ano –2. Já o ano 1 d.C. será o 1 na nomenclatura dos astrônomos (pois é o ano posterior 1 a.C.), e o ano 2 d.C. será o ano 2.

# MÓDULO – D 01

## Noções primitivas de geometria plana

### Exercícios de Fixação

#### Questão 01

**Comentário:**

A) Basta calcular 90º – 38º = 52º.

B) $\frac{2}{3}(90° - x) + \frac{1}{5}(180° - x) = 70º \Rightarrow 60º - \frac{2}{3}x + 36° - \frac{x}{5} = 70º \Rightarrow$

$96º - 70º = \frac{2}{3}x + \frac{x}{5} \Rightarrow 26º = \frac{10x + 3x}{15} \Rightarrow x = 30º$

#### Questão 02 – Letra E

**Comentário:** Como $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são complementares, temos que $\hat{A} + \hat{B} = 90°$. Além disso, $\frac{\hat{A}}{\hat{B}} = \frac{13}{17}$, em que $\hat{A} < \hat{B}$.

Com os dados disponíveis, temos o seguinte sistema:

$\hat{A} + \hat{B} = 90° \quad \hat{A} + \hat{B} = 90°$

$\frac{\hat{A}}{\hat{B}} = \frac{13}{17} \quad \hat{A} = \frac{13\hat{B}}{17}$

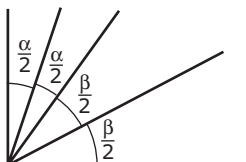
$\frac{13\hat{B}}{17} + \hat{B} = 90° \quad 13\hat{B} + 17\hat{B} = 1\,530° \quad 30\hat{B} = 1\,530° \quad \hat{B} = 51°$

Substituindo o valor de $\hat{B}$ = 51° na equação a seguir, temos:

$\hat{A} + \hat{B} = 90° \quad \hat{A} = 90° - 51° \quad \hat{A} = 39°.$

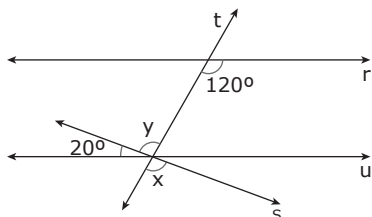
Os suplementos dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são, respectivamente, 141° e 129°, portanto, a razão entre os dois suplementos é $\frac{141°}{129°} = \frac{47}{43}$.

#### Questão 03 – Letra E

**Comentário:** Considere a figura a seguir com seus dados.

Como **α** e **β** são ângulos consecutivos, então α + β = 90º. Ora, o ângulo formado pelas bissetrizes desses ângulos é:

$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{90°}{2} = 45°$

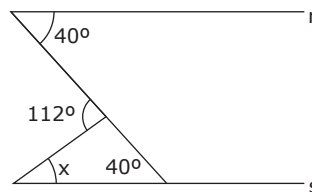
#### Questão 04 – Letra B

**Comentário:** Considere a figura a seguir e seus dados.

Pela figura, temos que r // u. Assim 20° + y = 120°, pois são ângulos alternos internos. Logo, y = 100°.

Os ângulos **x** e **y** são opostos pelo vértice, logo, x = y = 100°.

Portanto, 2x + 3y = 2.100° + 3.100° = 500°.

#### Questão 05 – Letra C

**Comentário:** Considere a figura a seguir com seus dados.

No triângulo formado, temos que 112º é ângulo externo. Logo, x + 40º = 112º ⇒ x = 112º – 40º ⇒ x = 72º .

### Exercícios Propostos

#### Questão 03

**Comentário:** Seja **x** o referido ângulo. Temos:

Complemento da metade do ângulo:

$90º - \frac{x}{2}$

Triplo do complemento da metade do ângulo:

$3 \ 90º - \frac{x}{2}$

Suplemento do triplo do complemento da metade do ângulo:

$180º - 3 \ 90º - \frac{x}{2}$ (I)

Complemento do ângulo:
90º – x

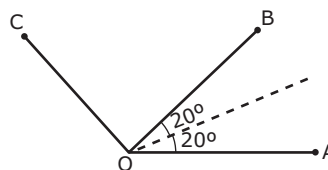
Triplo do complemento do ângulo:
3(90º – x) (II)

Do enunciado, temos que I e II são iguais. Logo:

$180º - 3 \ 90º - \frac{x}{2} = 3(90º - x) \Rightarrow$

$60º - 90º + \frac{x}{2} = 90º - x \Rightarrow x = 80º$

#### Questão 05

**Comentário:** Considere a figura a seguir com seus dados.

Para ângulo consecutivo a $A\hat{O}B$ (ou seja, que tem um lado em comum com $A\hat{O}B$), temos duas opções:

- Ângulo $B\hat{O}C$
- Ângulo $A\hat{O}C$

Considerando a primeira opção, temos:

$\frac{1}{2}B\hat{O}C = 52º - 20º \quad B\hat{O}C = 64º$

Considerando a segunda opção, temos:

$\frac{1}{2}A\hat{O}C = 52º + 20º \quad A\hat{O}C = 144º$

Portanto, os valores possíveis para o ângulo pedido são 64º ou 144º.

## Questão 11 – Letra A

**Comentário:** Como as medidas **x**, **y** e **z** são proporcionais a 5, 20 e 25, temos:

$$(i)\quad \begin{cases} x = 5k \\ y = 20k, \ k \in \mathbb{R}^*_+ \\ z = 25k \end{cases}$$

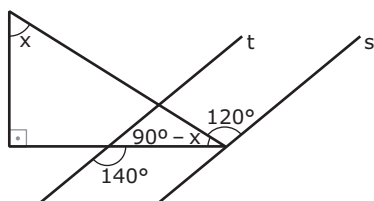
Da figura proposta no enunciado, concluímos que:

(ii) $x + y + z = 360º$

De (i) e (ii): $k = 7,2$

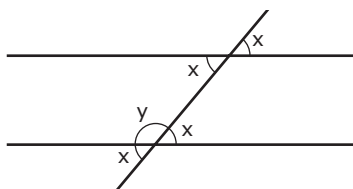
Portanto, $x = 5.7,2 = 36º$, e o suplemento de **x** vale $180º - 36º = 144º$.

## Questão 12 – Letra E

**Comentário:** Considere figura a seguir com seus dados.

O ângulo obtuso de medida 120º + 90º – x, formado entre a reta **s** e a base do triângulo, mede 140º, pois é alterno interno ao ângulo de 140º já assinalado. Equacionando, temos:

$120º + 90º - x = 140º \Rightarrow x = 70º$

## Questão 13 – Letra B

**Comentário:** Observe a figura a seguir:

Note que todos os ângulos agudos têm a mesma medida **x**, e que qualquer ângulo obtuso tem medida **y**.

Assim, do enunciado, tiramos: $2x = 72º \Rightarrow x = 36º$

Como **x** e **y** são suplementares, temos:

$y = 180º - 36º = 144º$

## Questão 14 – Letra A

**Comentário:** Como os ângulos de medidas 4x e **b** são colaterais internos, temos que $4x + b = 180º$. Da relação de ângulos correspondentes, temos $6x = 120º \Rightarrow x = 20º$. Substituindo esse resultado na primeira equação, temos: $b = 180º - 80º = 100º$.

## Questão 15 – Letra D

**Comentário:**

Triplo do complemento de um ângulo **x**: $3\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Terça parte do suplemento de um ângulo **x**: $\frac{1}{3}(\pi - x)$

Do enunciado: $3\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{3}(\pi - x) \Rightarrow x = \frac{7\pi}{16}$

# Seção Enem

## Questão 01 – Letra B

**Eixo cognitivo:** I

**Competência de área:** 2

**Habilidade:** 6

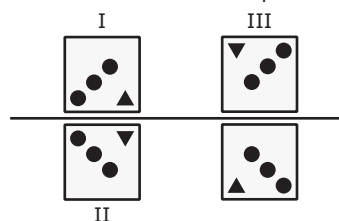
**Comentário:** Como informado no enunciado, AII partiu de Brasília, formando um ângulo de 135º, no sentido horário, com a rota Brasília-Belém, que é aproximadamente vertical. Apenas com a noção de que o ângulo de 135º é maior que o de 90º e menor que o de 180º, vemos que AII pode ter ido para Belo Horizonte ou para o Rio de Janeiro. Como nenhuma das alternativas da questão cita o Rio de Janeiro como opção de destino para AII, concluímos que AII foi para Belo Horizonte. Partindo de Belo Horizonte, AIII seguiu uma direção que forma, com a direção Brasília-Belo Horizonte, 90º no sentido anti-horário, ou ainda, 135º – 90º = 45º, no sentido horário, com a rota Brasília-Belém. Assim, apenas tendo a noção de que o ângulo de 45º é maior que o de 0º e menor que o de 90º, vemos que AIII se dirigiu a alguma das capitais de estados nordestinos. A única alternativa em que isso ocorre é a alternativa B.

## Questão 02 – Letra B

**Eixo cognitivo:** II

**Competência de área:** 2

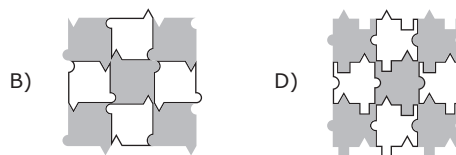
**Habilidade:** 7

**Comentário:** Basta notar que as figuras são simétricas verticalmente. Para perceber isso, basta colocá-las uma em cima da outra, em qualquer ordem. Fazendo o mesmo com a figura III, encontraremos a sua correspondente:

## Questão 03 – Letras B e D

**Eixo cognitivo:** II

**Competência de área:** 2

**Habilidade:** 7

**Comentário:** Para que a figura possa pavimentar o plano, devemos ter, para cada saída, uma entrada correspondente, formando um encaixe. Isso ocorre nas alternativas B e D.

## Questão 04 – Letra C

**Eixo cognitivo:** III

**Competência de área:** 2

**Habilidade:** 8

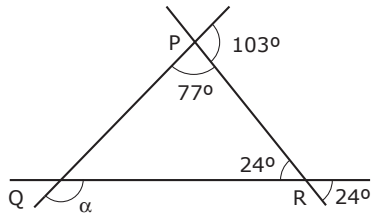
**Comentário:** Para preenchermos corretamente o espaço indicado no tabuleiro da figura A, devemos utilizar uma peça que complete o desenho que está na peça à direita. Assim, somente a peça 2 pode ser utilizada. Como na peça 2 a parte inferior deve ficar voltada para a direita, devemos girá-la 270º no sentido horário, ou 90º no sentido anti-horário.

# MÓDULO – D 02

## Triângulos e pontos notáveis

### Exercícios de Fixação

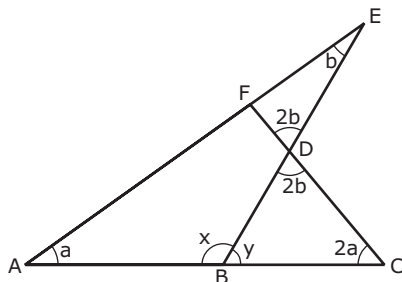
#### Questão 01 – Letra A

**Comentário:** Observe a figura a seguir:

O ângulo $P\hat{R}Q$ é oposto ao ângulo de 24°, logo, $P\hat{R}Q$ = 24°. Além disso, o ângulo $Q\hat{P}R$ é o suplemento do ângulo de 103°, portanto, $Q\hat{P}R$ = 180° – 103° = 77°.

O ângulo **α** é um ângulo externo do triângulo PQR, logo:

$\alpha = 77° + 24° \Rightarrow \alpha = 101°$.

#### Questão 02 – Letra D

**Comentário:** Considere a figura a seguir com seus dados.

O ângulo **x** é ângulo externo ao triângulo BCD.

Logo, $x = 2b + 2a \Rightarrow x = 2(a + b)$. (I)

O ângulo **y** é ângulo externo ao triângulo ABE.

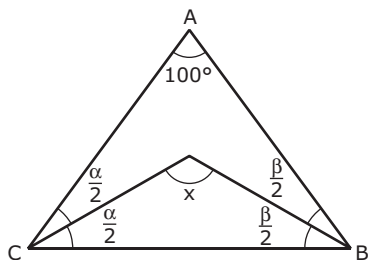
Logo, $y = a + b$. (II)

De I e II, temos $x = 2y$.

Assim, $2y + y = 180º \Rightarrow y = 60º$.

Daí, $x = 2.60º \Rightarrow x = 120º$.

#### Questão 03 – Letra B

**Comentário:** Considere a figura a seguir com seus dados.

Como um dos ângulos internos do triângulo ABC vale 100º, então, $\alpha + \beta = 80º$, pois se houvesse dois ângulos medindo 100º, a soma dos ângulos internos seria maior que 180º.

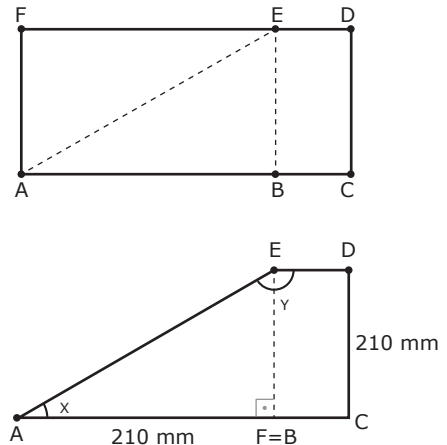
Seja **x** o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

Daí: $x + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180° \Rightarrow x + \frac{\alpha + \beta}{2} = 180º \Rightarrow$

$x + \frac{80°}{2} = 180º \Rightarrow x = 140º$

Mas, como x = 140º é obtuso, então, o ângulo agudo formado pelas bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ é 180º – 140º = 40º.

#### Questão 04 – Letra D

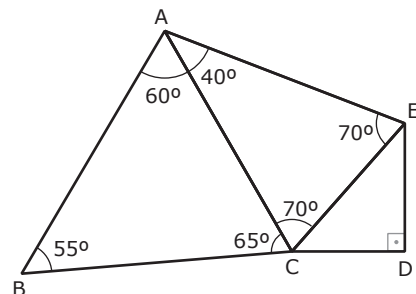
**Comentário:** Observe a figura a seguir:

Ao realizar a dobra, o ponto **F** deve coincidir com o ponto **B**, desse modo, o triângulo retângulo EBA é congruente ao triângulo EFA, logo:

EF = EB = AB = 210 mm $\Rightarrow \Delta$ ABE é isósceles

Assim temos que $2x = 90° \Rightarrow x = 45°$.

Por paralelismo podemos observar que **x** e **y** são suplementares, logo, y = 135°.

#### Questão 05 – Letra A

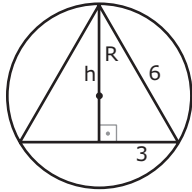
**Comentário:** Completando os triângulos ABC e ACE com os ângulos que faltam, temos:

Para descobrir qual é o maior lado na figura, analisaremos os três triângulos partindo do $\Delta$CDE. Nesse triângulo, o maior lado é o segmento CE, pois esse é a hipotenusa. Considerando o triângulo ACE, temos os lados AC = AE > CE, pois ao maior ângulo se opõe o maior lado. Por fim, analisando os ângulos do triângulo ABC, concluímos que AB > BC > AC.

### Exercícios Propostos

#### Questão 03 – Letra D

**Comentário:** Como $B\hat{C}D$ e $E\hat{C}B$ são suplementares e $E\hat{C}B$ = 80º, então, $B\hat{C}D$ = 100º. Como $E\hat{C}B$ = 80º é externo ao triângulo ABC (e, então, $C\hat{A}B + C\hat{B}A = E\hat{C}B$), $2.E\hat{A}B = E\hat{C}B$ e BD é bissetriz de $C\hat{B}A$, $C\hat{B}D$ = 20º. Pela soma dos ângulos internos ao triângulo DCB, temos, então, $B\hat{C}D + C\hat{D}B + D\hat{B}C = 180º \Rightarrow C\hat{D}B = 60º$.

## Questão 04 – Letra B

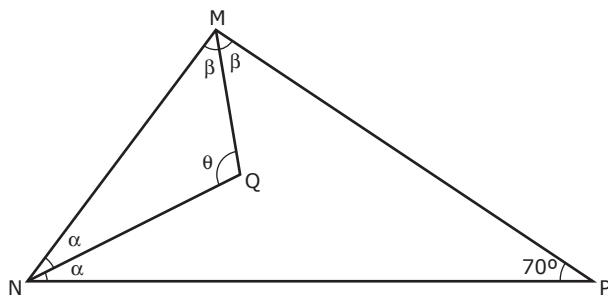
**Comentário:** Observe a ilustração a seguir:

No triângulo equilátero, todos os pontos notáveis são coincidentes, de forma que o segmento (de comprimento **R**) que liga o centro do círculo circunscrito a um vértice do triângulo coincide com o segmento (de comprimento $\frac{2h}{3}$, já que o baricentro divide as medianas na razão 2 para 1) que liga o baricentro a esse mesmo vértice. Determinando, pelo Teorema de Pitágoras, a altura do triângulo, temos $h = 3\sqrt{3}$.

Logo, $R = \frac{2}{3}h = 2\sqrt{3}$.

## Questão 05 – Letra B

**Comentário:** NP = PQ, pois MNPQ é um quadrado. NP = PR, pois o triângulo NPR é equilátero. Logo, PQ = PR, e, então, o triângulo PQR é isósceles, e $P\hat{Q}R = P\hat{R}Q$. Como $R\hat{P}N = 60^\circ$, por ser ângulo interno de um triângulo equilátero, e como $R\hat{P}N$ e $R\hat{P}Q$ são complementares, temos $R\hat{P}Q = 30^\circ$. Pela soma dos ângulos internos do triângulo isósceles PQR, $P\hat{Q}R = P\hat{R}Q = \frac{(180^\circ - 30^\circ)}{2} = 75^\circ$ e, como **α** e $P\hat{Q}R$ são complementares, $\alpha = 15^\circ$.

## Questão 08 – Letra D

**Comentário:** Pela geometria da situação, podemos extrair a seguinte figura:

No Δ MNP temos que:

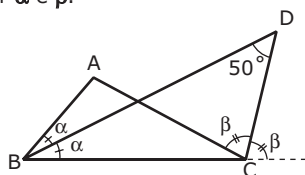
$2\alpha + 2\beta + 70^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 110^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 55^\circ$

No Δ MQN temos que:

$\underbrace{\alpha + \beta}_{55^\circ} + \theta = 180^\circ \quad 55^\circ + \theta = 180^\circ \quad \theta = 125^\circ$

Portanto, $M\hat{Q}N = 125^\circ$.

## Questão 15

**Comentário:** Considere a figura a seguir e os ângulos assinalados por **α** e **β**.

Como 2β é ângulo externo do triângulo ABC, temos:

$\hat{A} + 2\alpha = 2\beta$

No triângulo BCD, **β** é ângulo externo. Assim:

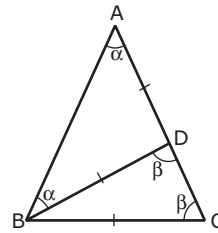
$50^\circ + \alpha = \beta$

Das relações anteriores, temos:

$$\begin{cases} \hat{A} + 2\alpha = 2\beta \\ 100^\circ + 2\alpha = 2\beta \end{cases} \quad \hat{A} = 100^\circ$$

## Questão 16 – Letra C

**Comentário:** Considere a figura a seguir com seus dados.

Como AD = BD = BC, temos: $\begin{matrix} B\hat{A}D = A\hat{B}D = \alpha \\ B\hat{D}C = B\hat{C}D = \beta \end{matrix}$

$B\hat{D}C$ é ângulo externo do triângulo ABD; portanto:

$\beta = 2\alpha$

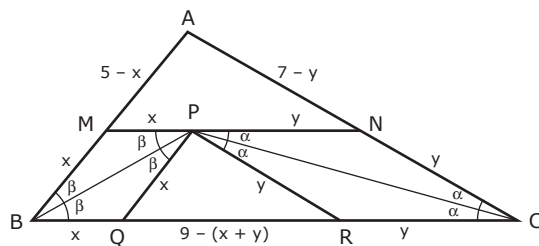
O triângulo ABC é isósceles, então, pela soma de seus ângulos internos, temos:

$2\beta + \alpha = 180^\circ$

Das relações anteriores, temos:

$$\begin{cases} \beta = 2\alpha \\ 2\beta + \alpha = 180^\circ \end{cases} \quad 2.2\alpha + \alpha = 180^\circ \quad \alpha = 36^\circ$$

## Questão 18 – Letra D

**Comentário:** Observe a figura a seguir:

BP é bissetriz de $A\hat{B}C$ e CP é bissetriz $A\hat{C}B$, portanto:

$M\hat{B}P = P\hat{B}Q = \beta$

$N\hat{C}P = P\hat{C}R = \alpha$

Como MN // BC , temos que:

$M\hat{P}B = P\hat{B}Q = \beta$

$N\hat{P}C = P\hat{C}R = \alpha$

Além disso:

BM / / PQ $\quad M\hat{B}P = B\hat{P}Q = \beta$

NC / / PR $\quad N\hat{C}P = C\hat{P}R = \alpha$

Podemos observar que os quadriláteros BMPQ e CNPR são losângos, cujos lados medem respectivamente **x** e **y**.

Seja 2p o perímetro do Δ AMN, temos:

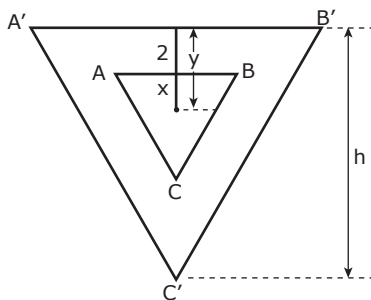
$2p = x + y + 5 - x + 7 - y \Rightarrow 2p = 12$

Seja 2p' o perímetro do Δ PQR, temos:

$2p' = x + y + 9 - x - y \Rightarrow 2p' = 9$

A razão entre os perímetros dos triângulos AMN e PQR respectivamente, será $\frac{2p}{2p'} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

## Questão 20 – Letra B

**Comentário:** Observe a figura a seguir:

O triângulo ABC é equilátero e possui lados com medidas iguais a $3\sqrt{3}$ cm, logo, sua altura é igual a $\frac{9}{2}$ cm.

Considerando **x** a distância do baricentro até o lado AB do $\Delta$ ABC, temos que:

$$x = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3} \quad x = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

Os triângulos possuem o mesmo baricentro e os lados paralelos, logo, a distância **y** do baricentro até o lado A'B' do $\Delta$ A'B'C' é igual a:

$$y = x + 2 \quad y = \frac{3}{2} + 2 \quad y = \frac{7}{2} \text{ cm}$$

Considerando **h** a altura do $\Delta$ ABC, temos que:

$$y = \frac{h}{3} \quad h = 3y \quad h = 3.\frac{7}{2} \quad h = \frac{21}{2} \text{ cm}$$

Portanto, a medida das alturas do $\Delta$ A'B'C' é igual 10,5 cm.

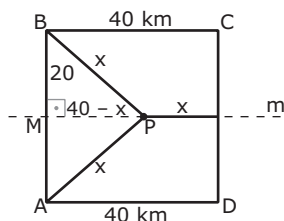
## Seção Enem

## Questão 01 – Letra C

**Eixo cognitivo:** III

**Competência de área:** 2

**Habilidade:** 8

**Comentário:** Seja **P** o ponto onde se localizará a estação. Como **P** deve ser equidistante de **A** e **B**, **P** deve pertencer à mediatriz **m** do segmento AB, representado na figura a seguir. Seja **x** a distância de **P** à reta que liga **C** e **D**. Teremos, pois, a seguinte situação.

Como o triângulo BMP é retângulo, temos:

$x^2 = (40 - x)^2 + 20^2 \Rightarrow 80x = 2\ 000 \Rightarrow x = 25$

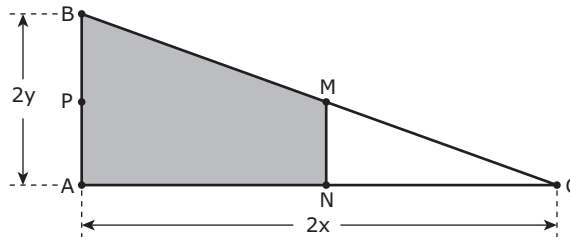
Portanto, o ponto **P** deve estar na perpendicular à estrada que liga **C** e **D** passando por seu ponto médio, a 25 km dessa estrada.

## Questão 02 – Letra E

**Eixo cognitivo:** III

**Competência de área:** 2

**Habilidade:** 8

**Comentário:** Considere a figura a seguir com seus dados.

Como **N** é ponto médio de AC, NC = x.

Como **M** é ponto médio de BC, MN é base média do triângulo ABC e mede **y**.

Então, sejam $S_{ABMN}$ a área do quadrilátero ABMN, $S_{MNC}$ a área do triângulo MNC e $S_{ABC}$ a área do triângulo ABC. Logo:

$$S_{ABC} = S_{MNC} + S_{ABMN} \qquad S_{ABMN} = 2xy - \frac{xy}{2} = \frac{3xy}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{2x.2y}{2} = 2xy \qquad S_{ABC} = 2xy$$

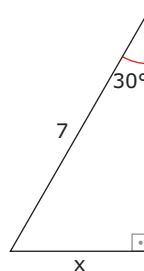
$$S_{MNC} = \frac{xy}{2} \qquad S_{MNC} = \frac{xy}{2}$$

$$S_{ABMN} = \frac{3}{4}.S_{ABC} = 3.S_{MNC}$$

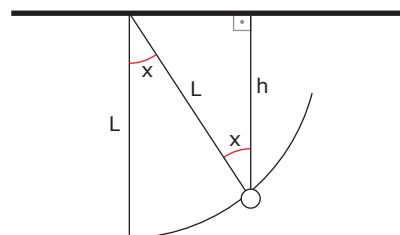
# MÓDULO – E 01

## Trigonometria no triângulo retângulo

### Exercícios de Fixação

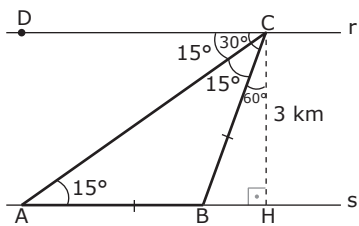
## Questão 01 – Letra D

**Comentário:**

$$\text{sen } 30° = \frac{x}{7} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{7} \Rightarrow x = 3{,}5$$

## Questão 02 – Letra A

**Comentário:**

$$\cos x = \frac{h}{L} \Rightarrow h = L.\cos x$$

## Questão 03 – Letra C

**Comentário:** Observe a figura a seguir, com seus dados.

Como as retas **r** e **s** são paralelas cortadas por uma transversal AC, então $D\hat{C}A = B\hat{A}C$, ou seja, $B\hat{A}C = 15º$.

Sabemos que $A\hat{C}B = 30º - 15º = 15º$.

Logo, o triângulo ABC é isósceles de base AC, ou seja, BC = AB.

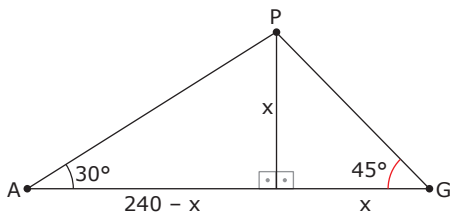
Sabemos também que $B\hat{C}H = 90º - 30º = 60º$.

Analisando o triângulo BHC, temos:

$$\cos 60º = \frac{HC}{BC} \Rightarrow BC = \frac{HC}{\cos 60°}$$

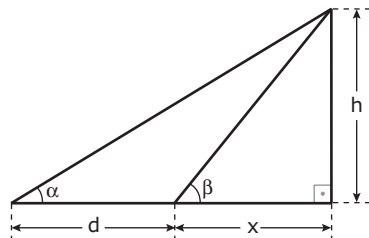
Como BC = AB, então:

$$AB = \frac{HC}{\cos 60°} \Rightarrow AB = \frac{3}{\frac{1}{2}} \Rightarrow AB = 6 \text{ km}$$

## Questão 04 – Letra B

**Comentário:**

$$\text{tg } 30º = \frac{x}{240 - x} \text{ Þ } \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{240 - x} \text{ Þ } x = 120.\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

## Questão 05 – Letra A

**Comentário:** Observe a figura a seguir:

Temos que:

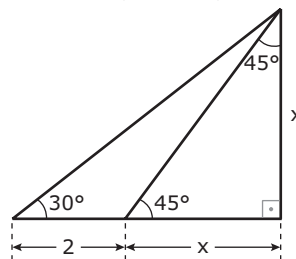
$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } \beta = \dfrac{h}{x} \quad x = \dfrac{h}{\text{tg } \beta} \\ \text{tg } \alpha = \dfrac{h}{d + x} \quad h = d.\text{tg } \alpha + x.\text{tg } \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$h = d.\text{tg } \alpha + \frac{h}{\text{tg } \beta}.\text{ tg } \alpha \Rightarrow h.\text{tg } \beta = d.\text{tg } \alpha.\text{tg } \beta + h.\text{tg } \alpha \Rightarrow$$

$$h(\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha) = d.\text{tg } \alpha.\text{tg } \beta \Rightarrow h = \frac{d.\text{tg } \alpha.\text{tg } \beta}{\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha}$$

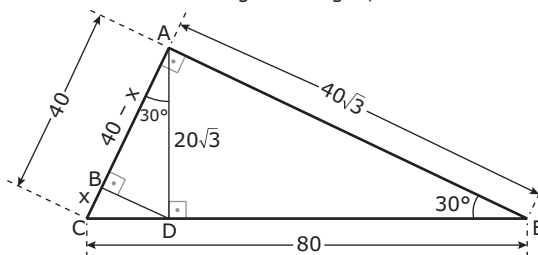
# Exercícios Propostos

## Questão 01 – Letra D

**Comentário:** Observe a figura a seguir, com seus dados.

Seja **x** a medida da altura da montanha. Então, temos:

$$\text{tg } 30º = \frac{x}{x + 2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{x + 2} \Rightarrow x = \sqrt{3} + 1 \quad 2,7$$

## Questão 02 – Letra B

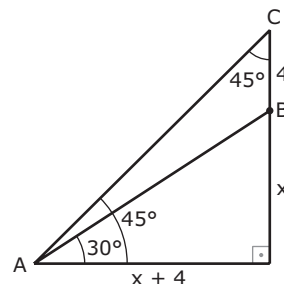
**Comentário:** Observe a figura a seguir, com seus dados.

$$\cos 30º = \frac{AB}{AD} = \frac{40 - x}{20\sqrt{3}} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{40 - x}{20\sqrt{3}} \quad x = 10$$

## Questão 07 – Letra D

**Comentário:**

$$\text{tg } 30º = \frac{x}{x + 4} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{x + 4} \Rightarrow$$

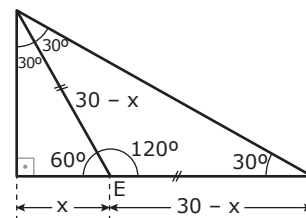
$$x = 2\left(\sqrt{3} + 1\right)$$

## Questão 08 – Letra B

**Comentário:**

Seja o ponto E o escritório. De acordo com a Figura a seguir, temos:

$$\text{sen } 30º = \frac{x}{30 - x} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{30 - x} \Rightarrow$$

x = 10

## Questão 09 – Letra E

**Comentário:**

O valor de **y** será dado por:

$$\text{sen}^2\, 10º + \text{sen}^2\, 20º + \text{sen}^2\, 30º + \text{sen}^2\, 40º + \cos^2 40º + \cos^2 30º + \cos^2 20º + \cos^2 10º + 1^2$$

y = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5

## Questão 10 – Letra A

**Comentário:** Observe a figura a seguir, com seus dados.

$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{160} \Rightarrow 2h = 160\sqrt{3} \Rightarrow h = 80\sqrt{3}$$

Sabemos que a altura do teodolito é de 1,5 metros, logo, a altura do morro é igual a $80\sqrt{3} + 1{,}5$ metros.

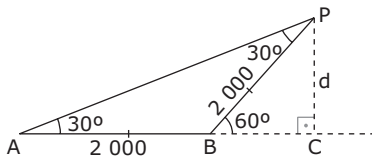
## Seção Enem

## Questão 01 – Letra B

**Eixo cognitivo:** III

**Competência de área:** 2

**Habilidade:** 8

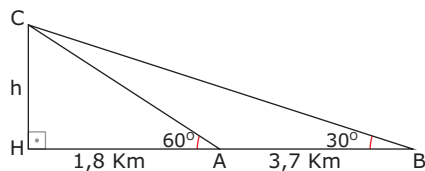
**Comentário:** Mantendo a mesma trajetória, a menor distância, em m, do barco até o ponto **P** é

$$\text{sen } 60° = \frac{d}{2\,000} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{3}}{2}.2\,000 \Rightarrow d = 1\,000\sqrt{3} \text{ m}$$

## Questão 02 – Letra C

**Eixo cognitivo:** III

**Competência de área:** 2

**Habilidade:** 8

**Comentário:** Seja **C** a localização do balão e h = CH sua altura, conforme a figura a seguir:

Como o ângulo $C\hat{A}B$ mede 120° (pois é suplementar ao ângulo $C\hat{A}H$), temos no triângulo ABC:

$A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B = 180° \Rightarrow B\hat{C}A = 180° - 120° - 30° \Rightarrow B\hat{C}A = 30°$

Logo, o triângulo ABC é isósceles e AC = AB = 3,7 Km.

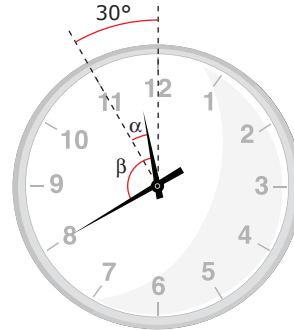
Então, usando o Teorema de Pitágoras no triângulo ACH, chegamos a:

$AH^2 + CH^2 = AC^2 \Rightarrow 1{,}8^2 + h^2 = 3{,}7^2 \Rightarrow h^2 = 10{,}45 \Rightarrow h \approx 3{,}1$

# MÓDULO – E 02

## Arcos e ciclo trigonométrico

### Exercícios de Fixação

## Questão 01 – Letra C

**Comentário:**

$$\alpha = \frac{40}{60}.30° = 20°$$

$$\beta = 3.30° + 20° = 110°$$

## Questão 02 – Letra A

**Comentário:** De acordo com o enunciado, temos:

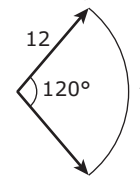
1) $A \xrightarrow{120°} E$ (Sentido anti-horário)

2) $E \xrightarrow{270°} H$ (Sentido horário)

3) $H \xrightarrow{135°}$ (Sentido anti-horário)

Logo, –120º + 270º – 135º = 15º. Portanto, o cofre será aberto quando a seta estiver no ponto médio entre **L** e **A**.

## Questão 03 – Letra B

**Comentário:** Observe a figura a seguir, com seus dados.

$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ —— } 60 \text{ minutos} \\ x \text{ —— } 20 \text{ minutos} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{360°.20}{60} \Rightarrow x = 120°$$

ou $x = \frac{2\pi}{3}$

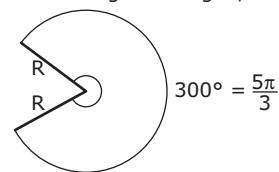
Daí, o seu comprimento $\ell$ é:

$\ell = \alpha.R \Rightarrow \ell = \frac{2\pi}{3}.12 \Rightarrow \ell = 8\pi \Rightarrow \ell \cong 25{,}12$

Portanto, a distância percorrida pelo ponteiro do relógio é de 25,1 cm.

## Questão 04 – Letra C

**Comentário:** Observe a figura a seguir, com seus dados.

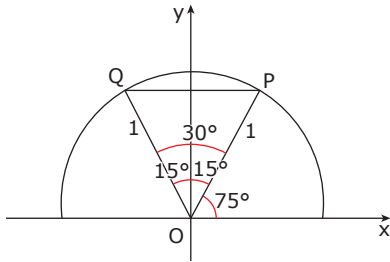
$$300° = \frac{5\pi}{3}$$

O comprimento $\ell$ do arco da circunferência é:

$\ell = \alpha.R \Rightarrow \ell = \frac{5\pi}{3}.R \Rightarrow 2\,000 \text{ m} = \frac{5\pi}{3}.R \Rightarrow \frac{6\,000}{5\pi} = R \Rightarrow$

$R \cong 381{,}97 \Rightarrow R \cong 382$ m

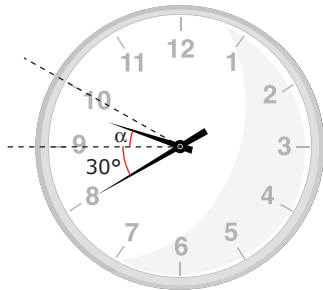
Portanto, o raio da circunferência mede, aproximadamente, 382 m.

## Questão 05 – Letra E

**Comentário:**

$$S = \frac{OQ.OP.\text{sen a}}{2} \text{ Þ } \frac{1.1.\text{sen } 30º}{2} \text{ Þ } \frac{\frac{1}{2}}{2} \text{ Þ } \frac{1}{4}$$

# Exercícios Propostos

## Questão 01 – Letra A

**Comentário:** Considere a figura a seguir, que representa a geometria da situação.

Seja **β** o ângulo formado pelo relógio às 21h 40min. Como o relógio é dividido em 12 partes, o ângulo central entre dois números consecutivos será dado por $\frac{360°}{12} = 30°$. Logo, o ângulo pedido será:

$$\alpha = \frac{40}{60}.30º = 20º$$

$$\beta = 30º + \alpha = 30º + 20º = 50º$$

## Questão 02 – Letra B

**Comentário:** De acordo com os dados do gráfico, temos:

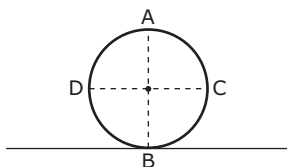
$$\alpha - \beta = (76{,}5\%).\ \underbrace{2\pi}_{\text{ângulo central em rad}} - (11{,}5\%).\ \underbrace{2\pi}_{\text{ângulo central em rad}}$$

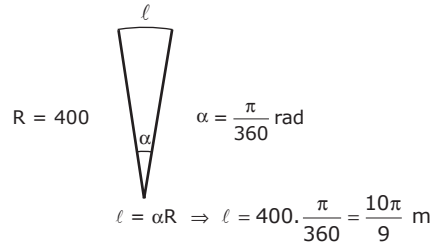
$$\frac{76{,}5}{100}.2\pi - \frac{11{,}5}{100}.2\pi = \frac{13\pi}{10}\text{rad}$$

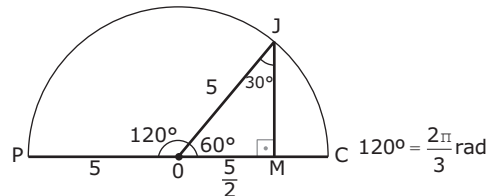
## Questão 04 – Letra A

**Comentário:**

21,98 = 1.$\alpha \Rightarrow \alpha$ = 3,5.(2.3,14) $\Rightarrow \alpha \cong$ 3,5.(2$\pi$) $\Rightarrow$ (3 voltas e meia)

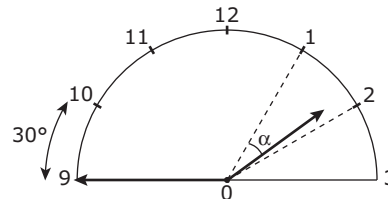
Portanto, a figura correspondente nesse momento é a seguinte:

## Questão 05 – Letra D

**Comentário:** Observe a figura a seguir, que representa o arco descrito pelo ponto mais alto

## Questão 07 – Letra A

**Comentário:** Observe a figura a seguir, com seus dados.

O comprimento $\ell$ do arco PJ em metros é:

$$\ell_{PJ} = \frac{1}{3}.2\pi.5 = \frac{10\pi}{3}\text{ m}$$

## Questão 10 – Letra A

**Comentário:** Observe a figura a seguir, com seus dados.

Note que o ponteiro menor demora 60 minutos para descrever um arco de 30º. Assim, em 45 minutos:

$$\alpha = \frac{45}{60}.30º = 22º30'$$

Menor ângulo = 4.30º + 22º30' = 142º30'

## Questão 13 – Letra D

**Comentário:** Sendo $\alpha$ o comprimento do arco de 8 cm em radianos, temos:

$$\alpha(\text{rad}) = \frac{\quad}{R} \qquad \alpha = \frac{8}{5}$$

# Seção Enem

## Questão 01 – Letra D

**Eixo cognitivo:** II

**Competência de área:** 3

**Habilidade:** 11

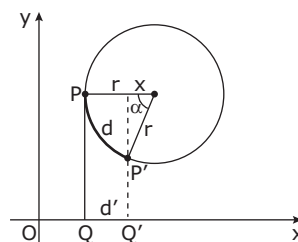
**Comentário:** 900º = 2.360º + 180º $\Rightarrow$ 2 voltas e meia

## Questão 02 – Letra B

**Eixo cognitivo:** I

**Competência de área:** 4

**Habilidade:** 15

**Comentário:** Considere a figura a seguir, com seus dados.

Temos que:

$d = r.\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{d}{r}$

Logo:

$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r.\cos\alpha \Rightarrow x = r.\cos\frac{d}{r}$

Como Q e Q' pertencem ao eixo **x**, temos que:

$d' = r - x \Rightarrow d' = r - r.\cos\frac{d}{r} \Rightarrow d' = r\;1 - \cos\frac{d}{r}$

# MÓDULO – E 03

## Funções seno e cosseno

### Exercícios de Fixação

### Questão 01 – Letra A

**Comentário:**

$$P(2) = 6\,000 + 50.2 + 2\,000.\;\frac{1}{2}\;\;7\,100$$

$$P(6)\;6\,000 + 50.6 + 2\,000.(-1) = 4\,300$$

7 100 ——— 100 %

4 300 ——— x % ⇒ x = 60,5 %

Portanto, em Julho, haverá uma queda na quantidade vendida em aproximadamente 39,5%.

### Questão 02 – Letra A

**Comentário:** Sabemos, da relação fundamental, que:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha + \;-\frac{1}{4}^{\;2} = 1 \Rightarrow$$

$$\text{sen}^2\,\alpha = 1 - \frac{1}{16} \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = \frac{15}{16} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Por hipótese, o ângulo **α** está no terceiro quadrante, ou seja, sen α < 0.

Logo, $\text{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

### Questão 03 – Letra C

**Comentário:** Para encontrar o período da função, devemos avaliar qual deve ser a variação de **x** para que o argumento do cosseno varie de 2π. Sendo **a** um valor qualquer e **p** o período procurado, matematicamente, temos:

$$\frac{(a+p)-2}{\pi} - \frac{(a)-2}{\pi} = 2\pi \Rightarrow \frac{a}{\pi} + \frac{p}{\pi} - \frac{2}{\pi} - \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} = 2\pi \Rightarrow p = 2\pi^2$$

A imagem da função cosseno é o intervalo [−1, 1]. Logo:

$$-1 \le \cos\;\frac{x-2}{\pi}\;\le 1 \Rightarrow -3 \le -3.\cos\;\frac{x-2}{\pi}\;\le 3$$

$$2 \le 5 - 3.\cos\;\frac{x-2}{\pi}\;\le 8$$

Por isso, a imagem de f(x) é [2, 8].

### Questão 04 – Letra D

**Comentário:** Seja f(x) = 8 – 4.cos x, essa função assume valor máximo quando cos x = –1. Logo: $f_{máx}(x) = 8 - 4.(-1) = 12$.

### Questão 05 – Letra D

**Comentário:** Pelo gráfico, temos que o período p = 5. Logo:

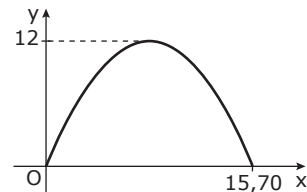
$$\frac{2\pi}{m} = 5 \qquad m = \frac{2\pi}{5}$$

A curva representada se aproxima da função seno, assim temos:

$$V(t) = 0{,}6.\text{sen}\;\frac{2\pi}{5}\,t$$

### Exercícios Propostos

### Questão 01 – Letra B

**Comentário:** Observe a figura.

período = p = 2.15,70 = 31,40 ≅ 10π ⇒

$$p = \frac{2\pi}{m} \Rightarrow m = \frac{1}{5} \Rightarrow f(x) = 12.\text{sen}\left(\frac{x}{5}\right)$$

### Questão 03 – Letra C

**Comentário:** Elevando ambos os lados da equação ao quadrado, temos:

$$(\text{sen}\,x - \cos x)^2 = \;\frac{1}{2}^{\;2} \Rightarrow$$

$$\text{sen}^2 x - 2.\text{sen}\,x.\cos x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

Sabemos, da relação fundamental, que

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, logo:

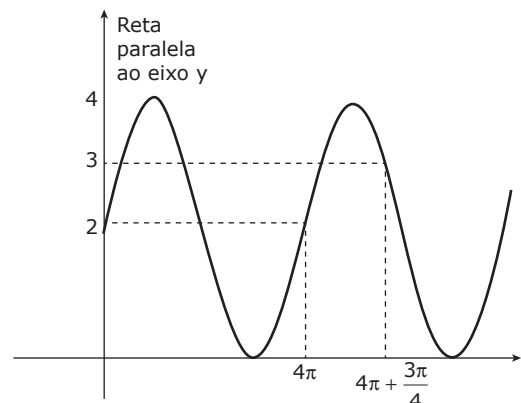
$$-2\,\text{sen}\,x.\cos x = \frac{1}{4} - 1 \qquad -2\,\text{sen}\,x.\cos x = -\frac{3}{4}$$

$$\text{sen}\,x\cos x = \frac{3}{8}$$

### Questão 05 – Letra D

**Comentário:** Sabemos que:

$$\frac{19\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \qquad 4\pi + \frac{3\pi}{4} \qquad 2.(2\pi) + \frac{3\pi}{4}$$

Como a função do gráfico possui período 2π, podemos representar $f\;\frac{19\pi}{4}$ como:

Logo, $f\;\frac{19\pi}{4}\; = f\;\frac{3\pi}{4}\; = 3$

Portanto, para $y = f\;\frac{19\pi}{4}$ , temos 2 < y < 4.

## Questão 06 – Letra C

**Comentário:**

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2\pi}{p} = 7\pi \Rightarrow p = \frac{2}{7} \\ \text{Im} = [-7, 7] \Rightarrow k = 7\end{array}\right\} \Rightarrow kp = 2$$

## Questão 08 – Letra B

**Comentário:**

$$\text{mín } \frac{1}{3 - \cos x} \qquad \text{máx } (3 - \cos x) = 3 - (-1) = 4 \Rightarrow$$

$$\text{mín } \frac{1}{3 - \cos x} = \frac{1}{4}$$

## Questão 12 – Letra D

**Comentário:**

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \left(-\sqrt{3 - a}\right)^2 + \frac{a - 2}{2}^{\,2} = 1$$

$$3 - a + \frac{a^2 - 4a + 4}{4} = 1$$

$$a^2 - 8a + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \ \left(\text{não convém, pois} -\sqrt{3 - 6} \notin \mathbb{R}\right) \\ a = 2 \Rightarrow 0 \le a < 3 \end{cases}$$

## Questão 13 – Letra C

**Comentário:**

$$\text{tg } \theta = \frac{AC}{OA} \qquad \frac{AC}{OA} = BD$$

$$\text{tg } \theta = \frac{BD}{OB} = BD$$

# Seção Enem

## Questão 01 – Letra B

**Eixo cognitivo:** IV

**Competência de área:** 4

**Habilidade:** 17

**Comentário:** Sabemos que o apogeu e o perigeu ocorrem quando **r** assume seus valores máximo e mínimo, respectivamente. Logo:

$$r_{\text{máx.}} = \frac{5\,865}{1 + 0{,}15.(-1)} = 6\,900 \text{ Km}$$

$$r_{\text{mín.}} = \frac{5\,865}{1 + 0{,}15.(+1)} = 5\,100 \text{ Km}$$

Assim, S = 6 900 + 5 100 = 12 000 Km.

## Questão 02 – Letra C

**Eixo cognitivo:** I

**Competência de área:** 5

**Habilidade:** 21

**Comentário:** Sabemos que os valores máximos e mínimos das vendas serão dados quando:

Máximo: $\text{sen } \frac{\pi t}{2} = -1 \Rightarrow t = 3{,}7 \text{ e } 11$

Mínimo: $\text{sen } \frac{\pi t}{2} = 1 \Rightarrow t = 1{,}5 \text{ e } 9$

Assim, concluímos que as vendas são maiores nos meses de março, julho e novembro.

# MÓDULO – E 04

## Funções tangente, cotangente, secante e cossecante

## Exercícios de Fixação

## Questão 01 – Letra D

**Comentário:** Basta resolver a equação trigonométrica:

$$3 \cos x + \text{sen } x = 3 \Rightarrow \text{sen } x = 3\,(1 - \cos x) \Rightarrow \frac{\text{sen } x}{3} = 1 - \cos x$$

Pela relação fundamental $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$, temos:

$$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow$$

$$\text{sen}^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x) = \frac{\text{sen } x}{3}(1 + \cos x) \Rightarrow$$

3.sen x = 1 + cos x, pois sen x = 0 não é solução da equação inicial.

Logo:

$$\begin{array}{l} 3.\cos x + \text{sen } x = 3 \\ 3.\text{sen } x = 1 + \cos x \end{array} \qquad \begin{array}{l} \cos x = \frac{4}{5} \\ \text{sen } x = \frac{3}{5} \end{array} \qquad \text{tg } x = \frac{3}{4}$$

Portanto, $\frac{1}{2} \le \text{tg } x < 1$.

## Questão 02 – Letra A

**Comentário:**

$$\text{tg } x = a \Rightarrow \frac{\text{sen } x}{\cos x} = a \Rightarrow \text{sen } x = a.\cos x$$

Da relação fundamental, vem:

$$(a.\cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x(a^2 + 1) = 1 \Rightarrow$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{a^2 + 1} \qquad \cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{a^2 + 1}} \Rightarrow$$

$$\cos x = \frac{-1}{\sqrt{a^2 + 1}}, \text{ pois } \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

Como vimos, $\text{sen } x = a.\cos x = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$.

Assim: $\text{sen } x + \cos x = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{-1}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{-a - 1}{\sqrt{a^2 + 1}}$

## Questão 03 – Letra C

**Comentário:**

$$T\,(30^\circ) = 12 + 3{,}31.\text{tg } 30^\circ$$

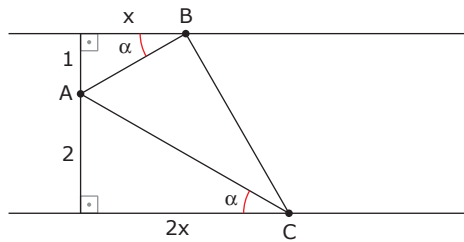
$$T\,(30^\circ) = 12 + 3{,}31.\frac{\sqrt{3}}{3} \quad 13{,}9 \text{ h}$$

$$T\,(0^\circ) = 12 + 3{,}31.\text{tg } 0^\circ = 12 \text{ h}$$

Portanto, a diferença entre o total de horas de sol na cidade do Porto Alegre será:

$\Delta T = 13{,}9 \text{ h} - 12 \text{ h} \Rightarrow \Delta T = 1{,}9 \text{ h} = 1 \text{ h } 54 \text{ min.}$

## Questão 04 – Letra E

**Comentário:**

$\text{tg}\ \alpha = \frac{1}{x} \quad x = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha}$

Podemos determinar a área do ΔABC ($S_\Delta$) subtraindo, da área do trapézio, a área dos outros dois triângulos, logo:

$$S = \frac{(2x + x).3}{2} - \frac{x.1}{2} - \frac{2x.2}{2}$$

$$S = 2x = 2.\frac{1}{\text{tg}\ \alpha} = 2\ \text{cotg}\ \alpha$$

## Questão 05 – Letra A

**Comentário:**

Como $\text{sen}\ x = \frac{5}{4}$ para x   4º quadrante, temos:

$\text{sen}\ x = \frac{1}{\cos x} = \frac{5}{4} \quad \cos x = \frac{4}{5}$

$\text{sen}^2\ x + {\frac{4}{5}}^{2} = 1 \quad \text{sen}\ x = -\frac{3}{5}$

Logo, $\text{tg}\ x = \frac{\text{sen}\ x}{\cos x} = -\frac{3}{4}$

# Exercícios Propostos

## Questão 03 – Letra B

**Comentário:** Como x   2º quadrante, temos:

ON = cos x
OM = sen x
AP = tg x

## Questão 07 – Letra E

**Comentário:** Como $\text{sen}\ x = \frac{2}{3}$, então:

$\text{sen}^2\ x + \cos^2\ x = 1 \quad {\frac{2}{3}}^{2} + \cos^2\ x = 1$

$\cos^2\ x = 1 - \frac{4}{9} \quad \cos^2\ x = \frac{5}{9} \quad_{\cos x \quad 1º\ \text{quadrante}} \quad \cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Logo:

$\text{cotg}\ x = \frac{1}{\text{tg}\ x} = \frac{\cos x}{\text{sen}\ x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} \quad \text{cotg}\ x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

## Questão 09 – Letra A

**Comentário:**

$(\text{tg}^2\ x + 1)(\text{sen}^2\ x - 1) = \sec^2 x.(-\cos^2 x) = \frac{1}{\cos^2\ x}.(-\cos^2 x) = -1$

## Questão 10 – Letra C

**Comentário:**

$$PQ = \text{tg}\ \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\text{sen}\ \frac{\pi}{2} - \alpha}{\cos\ \frac{\pi}{2} - \alpha} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha} = \text{cotg}\ \alpha$$

## Questão 11 – Letra B

**Comentário:**

$2.\text{sen}\ \theta = 3.\text{tg}^2\ \theta \Rightarrow 2.\text{sen}\theta = 3.\frac{\text{sen}^2\ \theta}{\cos^2\ \theta} \Rightarrow$

$3.\text{sen}^2\ \theta = 2.\text{sen}\ \theta.\cos^2\ \theta \Rightarrow 3.\text{sen}\ \theta = 2.(1 - \text{sen}^2\ \theta) \Rightarrow$

$2.\text{sen}^2\ \theta + 3.\text{sen}^2\ \theta - 2 = 0 \Rightarrow$

$\text{sen}\ \theta = \frac{1}{2} \quad \cos\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pois $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\text{sen}\ \theta = -2$ (não convém, pois $-1 \leq \text{sen}\ \theta \leq 1$)

## Questão 12 – Letra E

**Comentário:**

Sabemos que $\text{cotg}\ x = \frac{1}{\text{tg}\ x} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Logo,

$(\text{cotg}\ x)^2 + 1 = \text{cossec}^2\ x \quad {\frac{1}{\sqrt{5}}}^{2} + 1 = \frac{1}{\text{sen}^2\ x}$

$\frac{6}{5} = \frac{1}{\text{sen}^2\ x} \quad \text{sen}^2\ x = \frac{5}{6}$

## Questão 13 – Letra D

**Comentário:**

tg (90º + x) = –tg (90º – x)

$$= -\frac{\text{sen}(90º - x)}{\cos(90º - x)} = -\frac{\cos x}{\text{sen} x} = -\text{cotg}\ x$$

# Seção Enem

## Questão 01 – Letra D

**Eixo cognitivo:** I
**Competência de área:** 5
**Habilidade:** 19
**Comentário:**

$L(2) = 10\ 000 + \frac{1\ 000}{\sec\ \frac{\pi.2}{6}} = 10\ 000 + \frac{1\ 000}{\sec\ \frac{\pi}{3}} \Rightarrow$

$L(2) = 10\ 000 + 1\ 000.\cos\ \frac{\pi}{3} \Rightarrow$

$L(2) = 10\ 000 + 1\ 000.\frac{1}{2} = 10\ 500$

## Questão 02 – Letra C

**Eixo cognitivo:** I

**Competência de área:** 5

**Habilidade:** 21

**Comentário:** Como o mês de abril corresponde a t = 4, temos que:

$L_A(4) = 200 + 50.\cos\ \frac{\pi.4}{12} = 200 + 50.\cos\ \frac{\pi}{3} \Rightarrow$

$L_A(4) = 200 + 50.\frac{1}{2} = 225$

$L_B(4) = 300 - 50.\text{cossec}\ \frac{\pi.4}{24} = 300 - 50.\text{cossec}\ \frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$L_A(4) = 300 - 50.\frac{1}{\text{sen}\ \frac{\pi}{6}} = 300 - 50.\frac{1}{\frac{1}{2}} = 200$

Logo, concluímos que, no mês de abril, a empresa **A** lucrou R$ 25 000,00 a mais que a empresa **B**.